



## Teil 4: Equity | Ausgleich

Prof. Dr. Dr. F. J. Radermacher | 01.12.2014 |  
Datenbanken/Künstliche Intelligenz

franz-josef.radermacher@uni-ulm.de

## Armut

### Empirie:

- **Ca. 1 Mrd. Menschen haben Einkommen  $<$  \$1 pro Tag (Tendenz leicht abnehmend).**
- **Ca. 2 Mrd. Menschen haben ein Einkommen  $>$  \$ 1 pro Tag und  $<$  \$2 pro Tag.**
- **Das Einkommen dieser 3 Mrd. Menschen ist etwa so groß wie das der 350 einkommensstärksten („Reichsten“).**

## Armut – flächentreue Darstellung

Halve, between 1990 and 2015, the proportion of people whose income is less than \$1 a day  
If current projections of economic growth are met, global poverty will fall to 10 percent by 2015.



## Armut – parametrische Darstellung

Countries have been resized based on the estimated population living on less than \$1 a day in 2002



## Armut ist relativ!

### EU Verständnis:

Zunächst: Ermittlung des Medianes der Einkommen eines Landes

Person ist armutsgefährdet, wenn ihr Einkommen weniger als 60% des Medianes beträgt.

Quelle: Statistisches Bundesamt, [www.destatis.de](http://www.destatis.de)

## Armut ist relativ!

Das Einkommen jeder Person sollte:

mind. 50% des  
durchschnittlichen Einkommens  
aller höheren Einkommen („aller reicheren“)  
des Landes betragen.



**Wie groß ist der Anteil tatsächlich? D.h. welcher Wert statt 50% liegt vor?**

## Verteilung von Einkommen - Lorenzkurve

$$F(x) = \frac{\text{kumulatives Einkommen der } 100 * x \% \text{ ärmsten}}{\text{Gesamteinkommen}}$$

$$x = 0 \dots 1$$

Vorgehen zur Vergleichbarkeit von unterschiedlichen Stichproben(-größen):

- **2\* normieren**
- **1 \* sortieren**

Lorenzkurve ist Analogon zur Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Max Lorenz: statistischer Ökonom, University of Madison, Wisconsin.

## Lorenzkurve - Beispiel

Einkommen  $(y_1, \dots, y_n)$ :  $y_1 = 15, y_2 = 12, y_3 = 20, y_4 = 10$

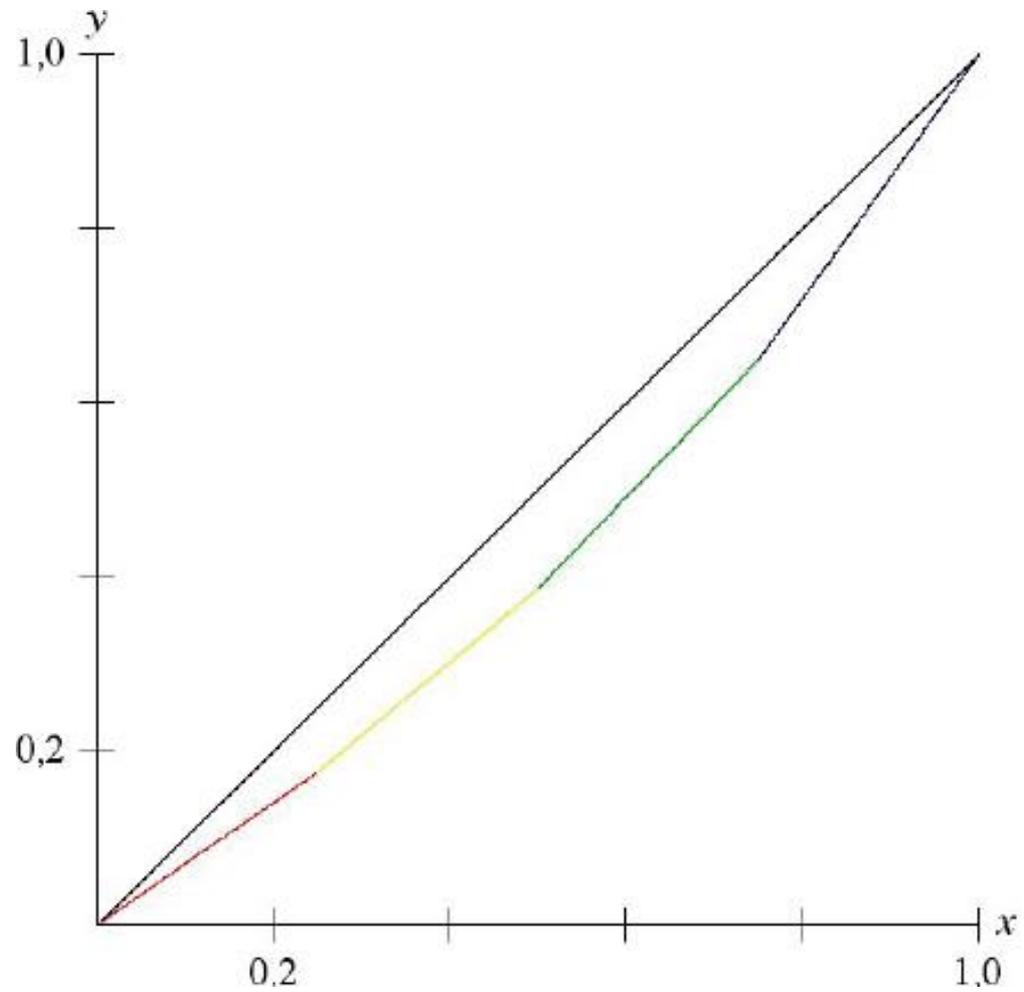
1. Sortieren  $(Y_{(1)}, \dots, Y_{(n)})$ :  $y_{(1)} = 10, y_{(2)} = 12, y_{(3)} = 15, y_{(4)} = 20$

2. Normieren:  $y = 10 + 12 + 15 + 20 = 57$

3. Kumulative Bevölkerung:  $x_1 = 0.25, x_2 = 0.50, x_3 = 0.75, x_4 = 1.0$

4. Kumulatives Einkommen:  $F(x_1) = 10/57 = 0.175$   
 $F(x_2) = (10 + 12) / 57 = 0.3859$   
 $F(x_3) = (10+12+15) / 57 = 0.6491$   
 $F(x_4) = 57/57 = 1$

## Lorenzkurve - Beispiel



## Lorenzkurve - allgemeine Eigenschaften

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- **F monoton steigend und konvex** (nach unten gekrümmt)  
 **stetig (keine Sprünge).**

## Lorenzkurven - Äquivalenzeinkommen

- **Praktische Berechnung von Lorenzkurven:**

Einzelpersonen  $\longrightarrow$  private Haushalte (ansonsten viele kleine Einkommen oder Null-Einkommen).

Haushaltseinkommen  $\longrightarrow$  Äquivalenzeinkommen.

- **OECD Wurzelverfahren**

1 Person 1.0, 2 Personen 1.41, 3 Personen 1.73,  
4 Personen 2.00, 5 Personen 2.24, etc.

**Bsp.**

Nettoeinkommen von 40 000 € in 3 Personen Haushalt  
wird rechnerisch zu  $40\,000\text{ €} * 1.73 = 69\,200\text{ €}$

## Lorenzkurven - Äquivalenzeinkommen

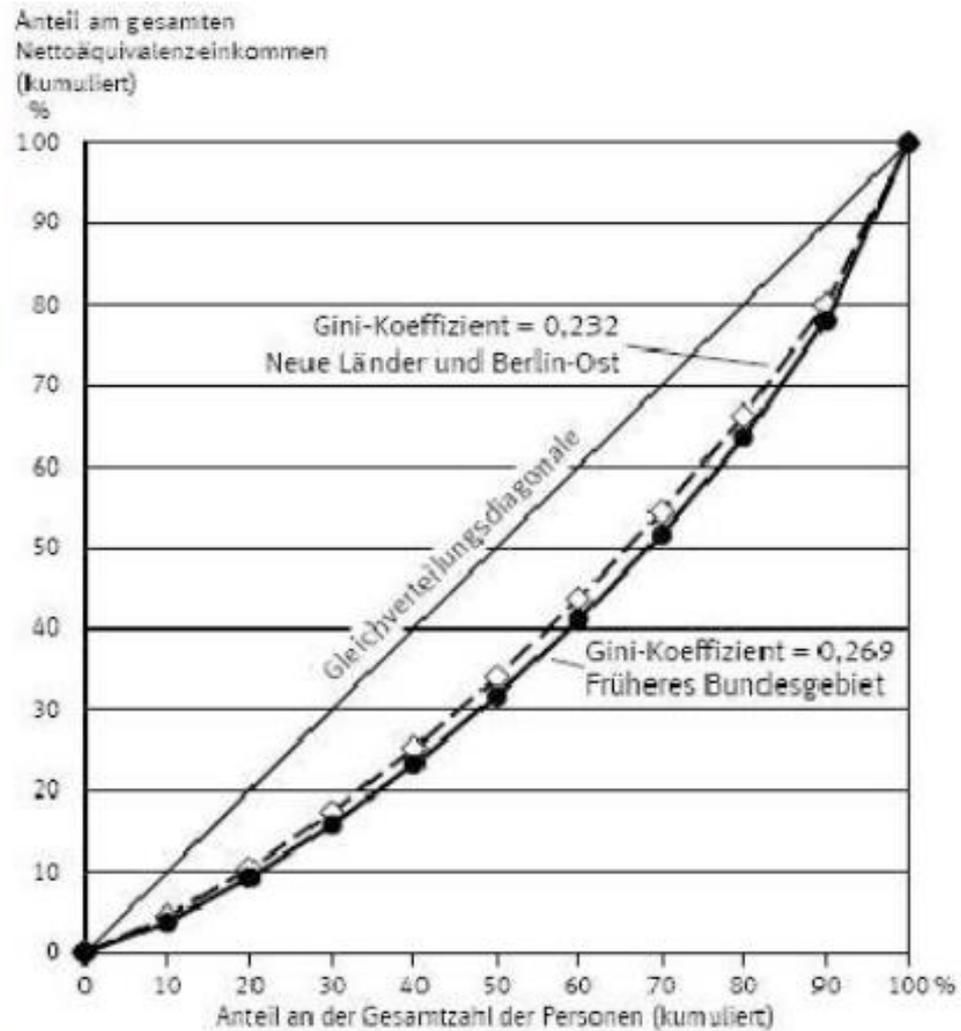
### OECD Äquivalenzzifferverfahren:

- Erste Person in Haushalt 1.0
- Jede Person über 15 Jahre 0.5
- Jede Person bis 15 Jahre 0.3



Bei der Lorenzkurven wird typischerweise mehr als die Lohnsumme "verteilt".

## Lorenzkurven - Deutschland (Ost vs. West)



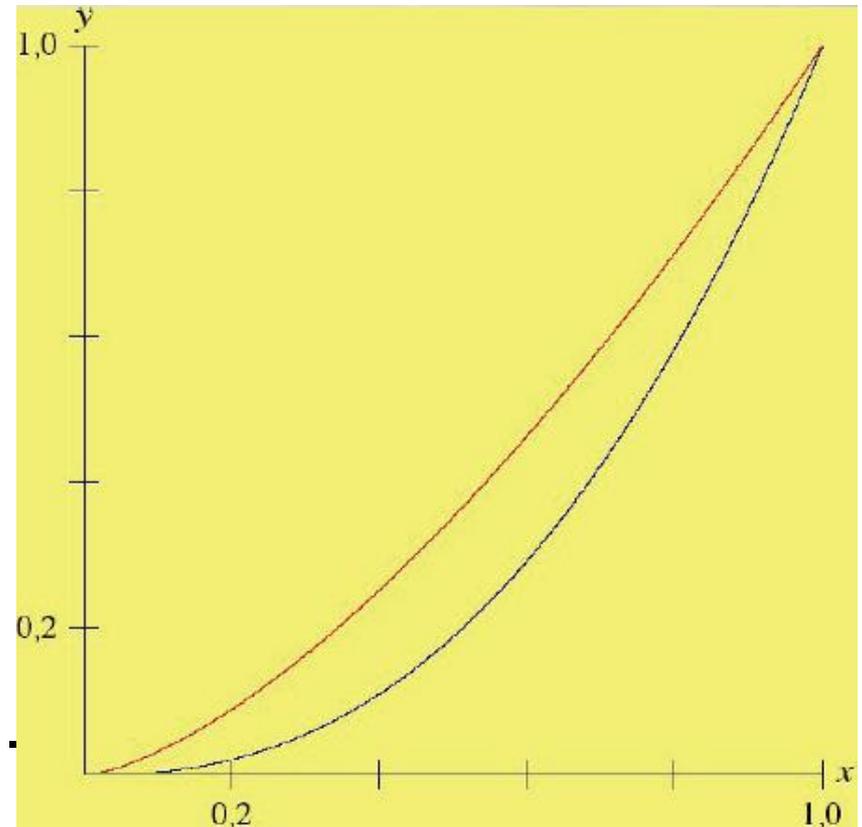
## Lorenzkurven – Dominanz

$F(x) \leq G(x)$  für alle  $0 \leq x \leq 1$

$\Leftrightarrow F \succeq_L G$

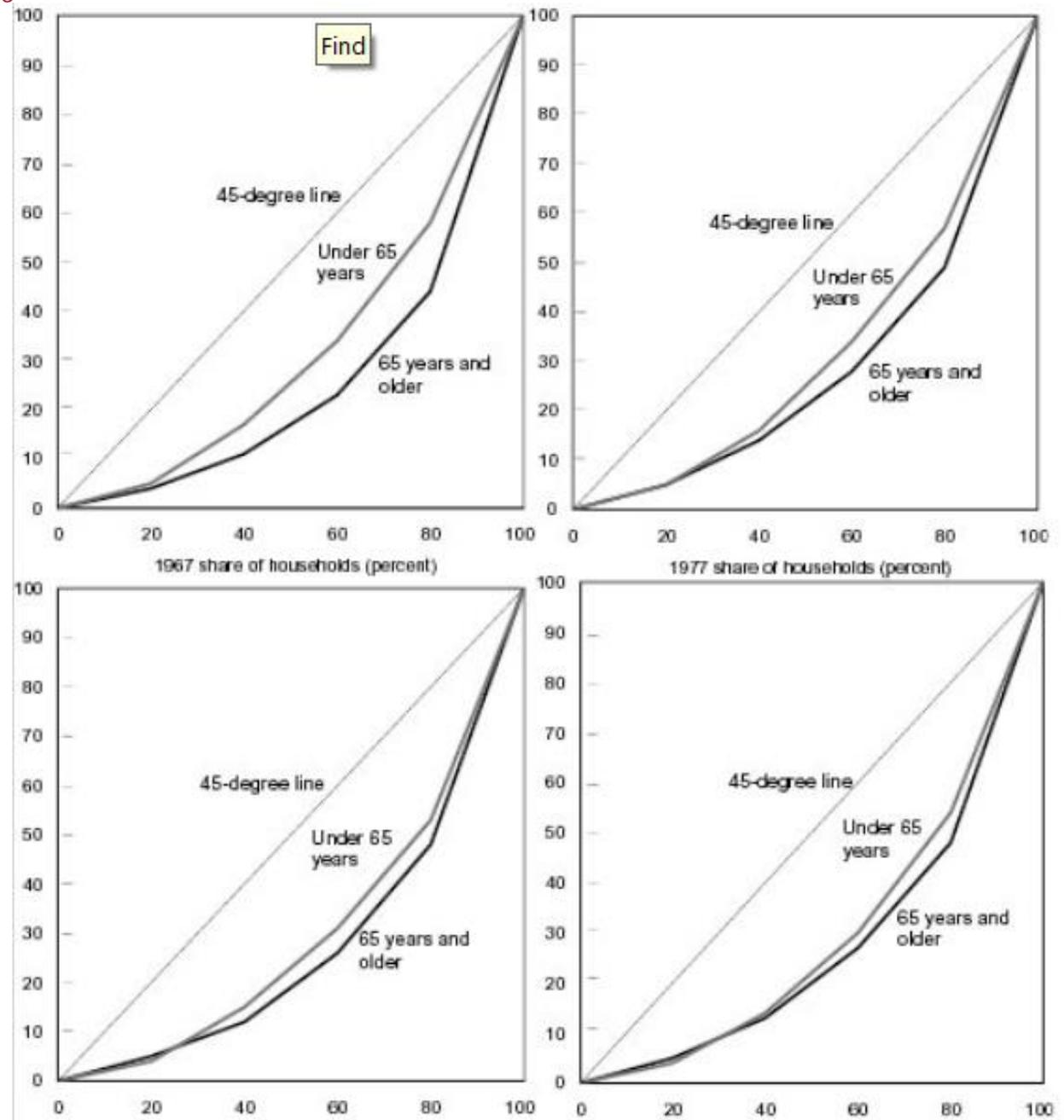
$\Leftrightarrow$  Lorenzkurve F (blau) dominiert  
Lorenzkurve G (rot)

( $\Leftrightarrow$  Ungleichheit bei F grösser als bei G).



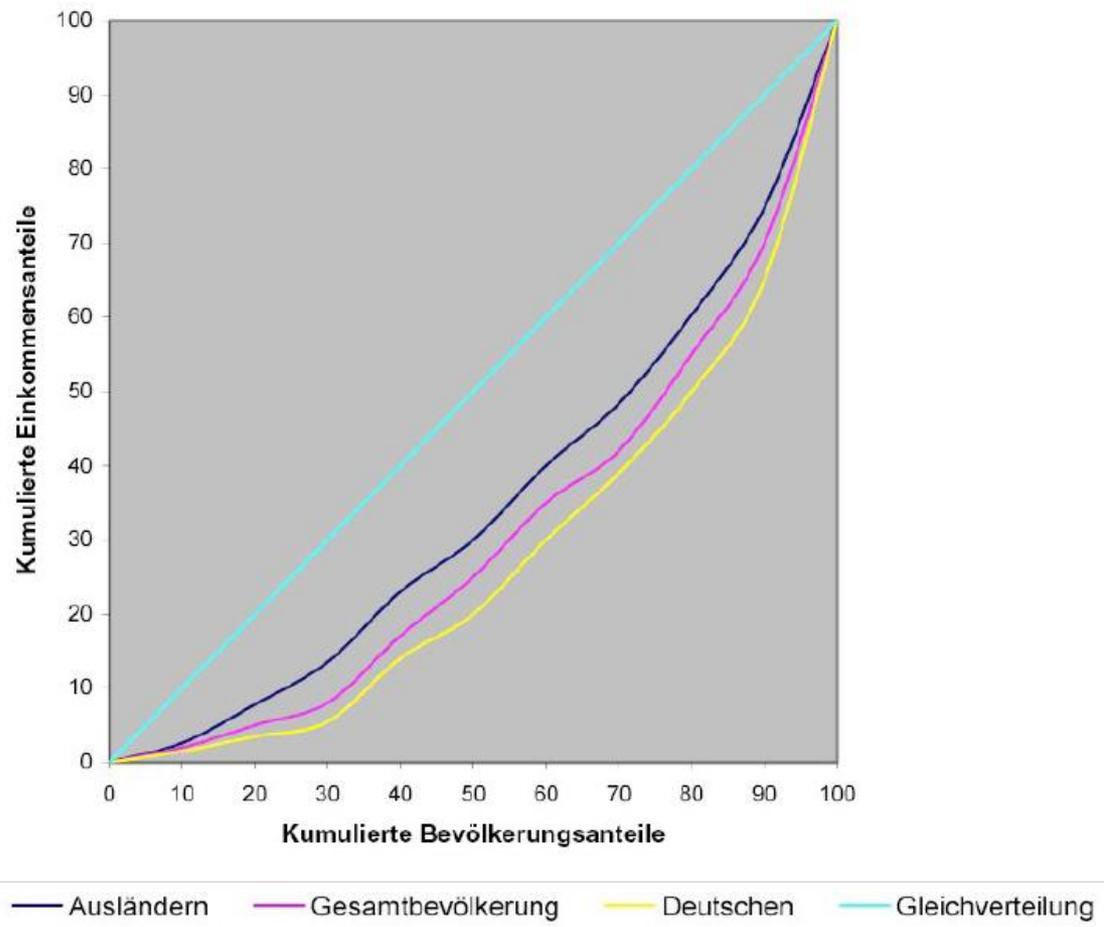
$\succeq_L$  nur „Halbordnung“: zwei sich schneidende Lorenzkurven sind unvergleichbar.

# Lorenzkurven - (fehlende) Dominanz

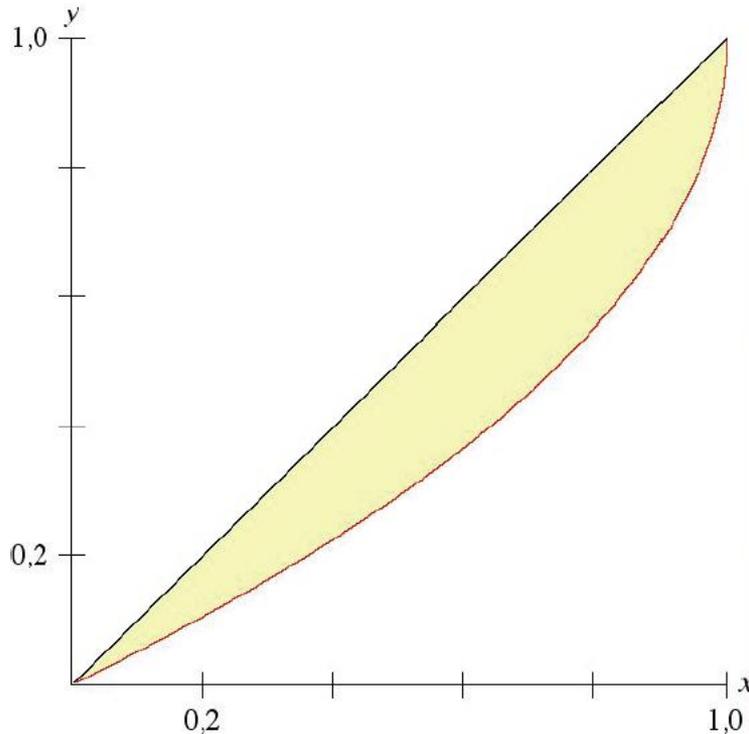


## Lorenzkurven - gemäß Segregation

Segregation nach Alter, Stadt vs. Land, ethnischer Abstammung, etc.



## Lorenzkurven - Gini-Index

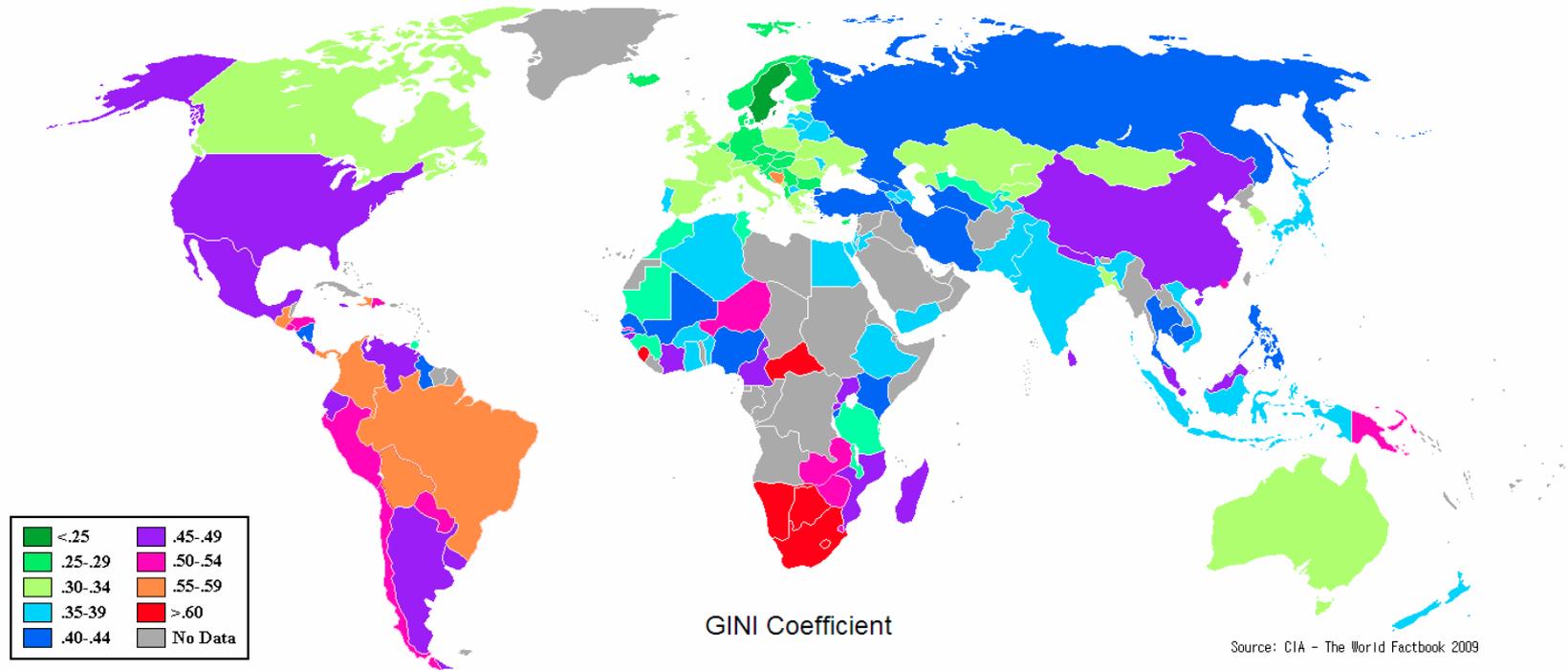


$$G = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^n i x_{(i)}}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i} - \frac{n+1}{n}$$

Maß für Abweichung von Gleichverteilung:

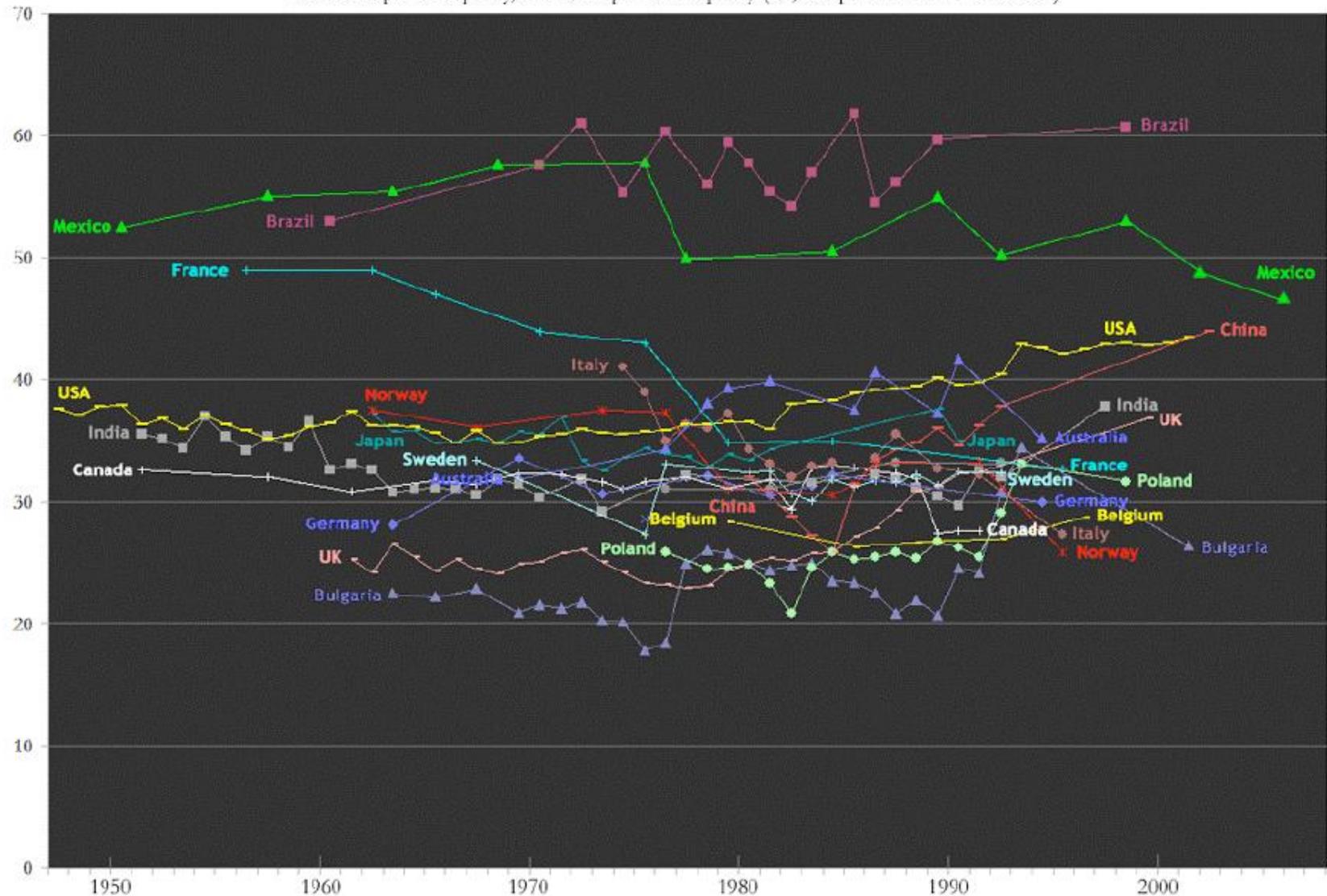
Gini-Index = 2 \* Integral über **markierten Bereich**

## Gini Indizes



## Income Disparity since World War II – the Gini Index

where 0 is perfect equality, and 100 is perfect inequality (i.e., one person has all the income)



## Lorenzkurven - individuelle Einkommen

- Einkommen eines einzelnen an der Position  $x$  ist (proportional zu)  $F'(x)$ .
- Einkommen eines einzelnen an der Position  $x$  ist 50% des Durchschnitts aller größeren Einkommen

$$F'(x) = 0.5 * \frac{1 - F(x)}{1 - x}$$

**Anteil kann von 50% abweichen**

$$F'(x) = \varepsilon * \frac{1 - F(x)}{1 - x}$$

## 1-parametrische Lorenzkurven

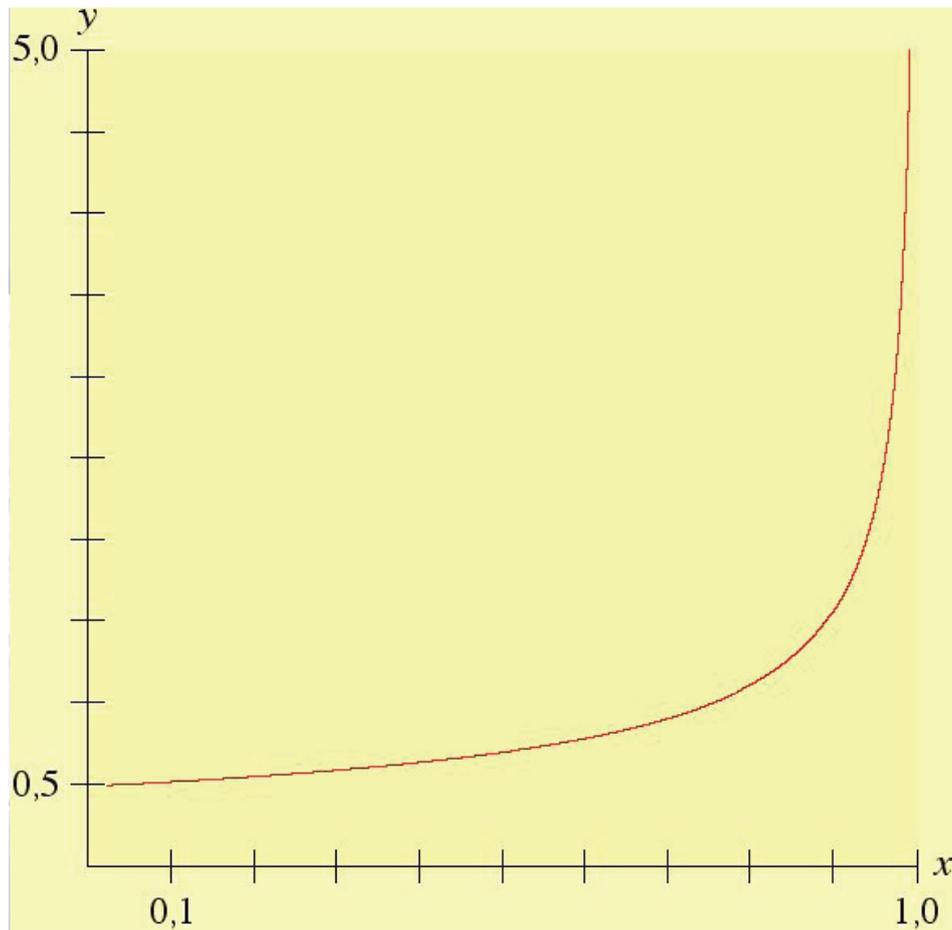
Vorangegangene lineare, inhomogene Differentialgleichung hat die Lösung:

$$F_{\varepsilon}(x) = 1 - (1 - x)^{\varepsilon}$$

- Equityparameter variiert zwischen 0 und 1.
- Je grösser der Equityparameter, desto ausgeglichener ist die Einkommensverteilung.

# 1-parametrische Lorenzkurven

„Dichte“ (Ableitung  $F'(x)$ )



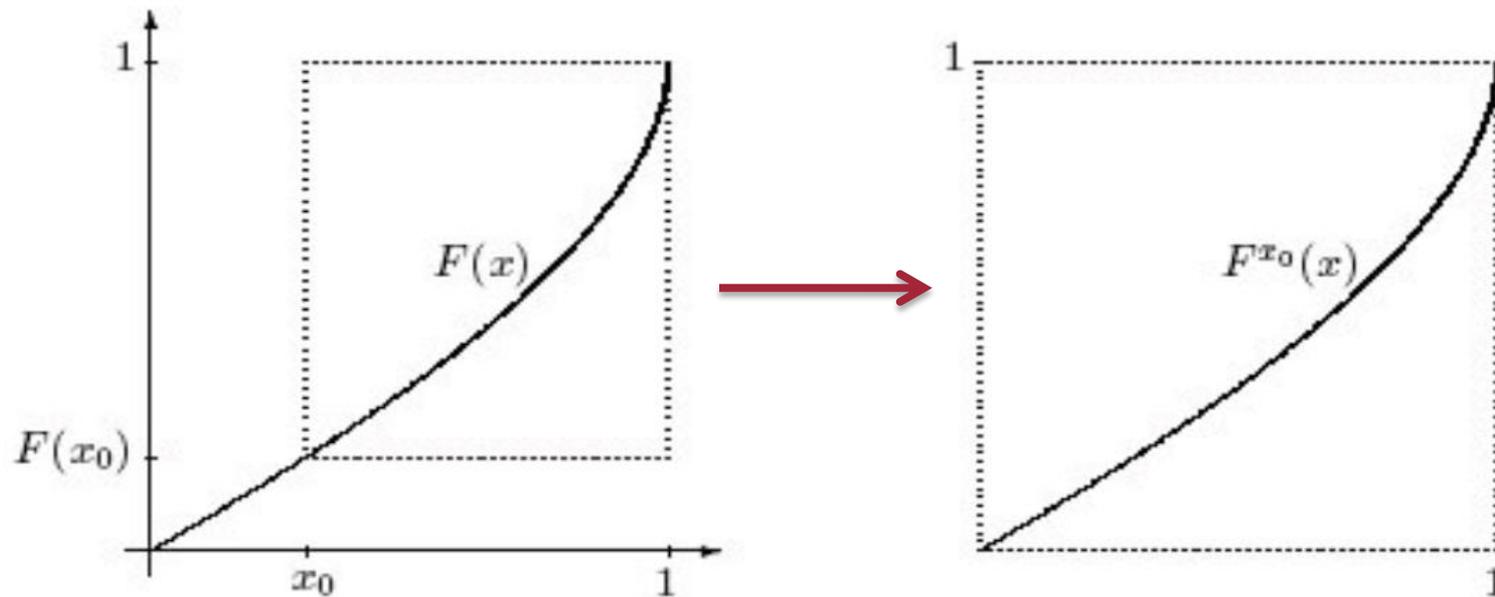
## Lorenzkurven - Selbstähnlich

- Wenn ein Einzeleinkommen mit allen größeren Einzeleinkommen in Beziehung gesetzt wird, kann man alle kleineren Einzeleinkommen abschneiden.  
(Einzelner wird Ärmster).
- Eine Einkommensverteilung wird selbstähnlich genannt, wenn:  
die Lorenzkurve aller Einkommensstärkeren  
identisch der ursprünglichen (gesamten) Lorenzkurve ist.



“Obere Universen = Gesamtuniversum”.

## Lorenzkurven - Selbstähnlich



Selbstähnlichkeit:  $F^{x_0}(x) = F(x)$

für alle Argumente  $0 \leq x \leq 1$ , alle Segmente  $[x_0, 1]$ .

## Lorenzkurven - Selbstähnlich

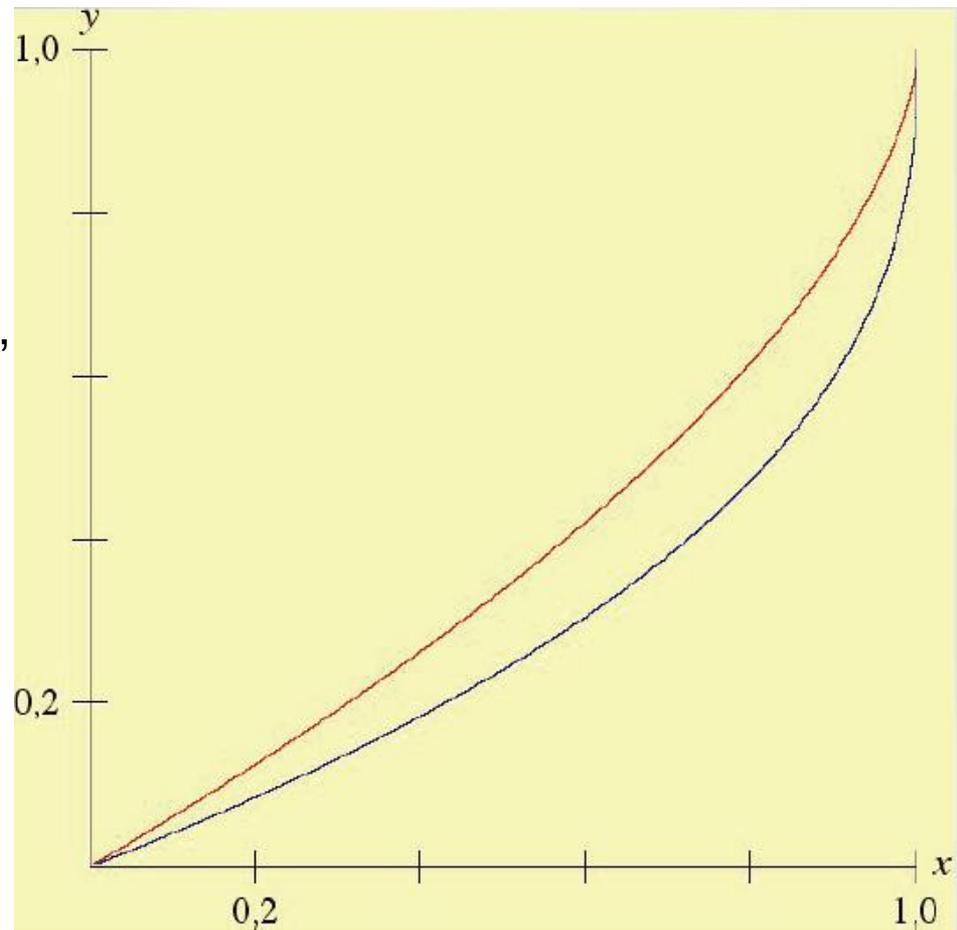
**Alle selbstähnlichen Lorenzkurven** (die differenzierbar sind und in 0 stetig differenzierbar) **sind vom Typ:**

$$F_{\varepsilon}(x) = 1 - (1 - x)^{\varepsilon}$$

## Equityparameter und Lorenzdominanz

Lorenzkurve zu kleinerem  
Equityparameter (0,4) dominiert,

Lorenzkurve zu größerem  
Equityparameter (0,6):



## Bestimmung Equityparameter

Gewöhnliche Kleinste-Quadrate-Regression  
(ordinary least squares OLS regression)

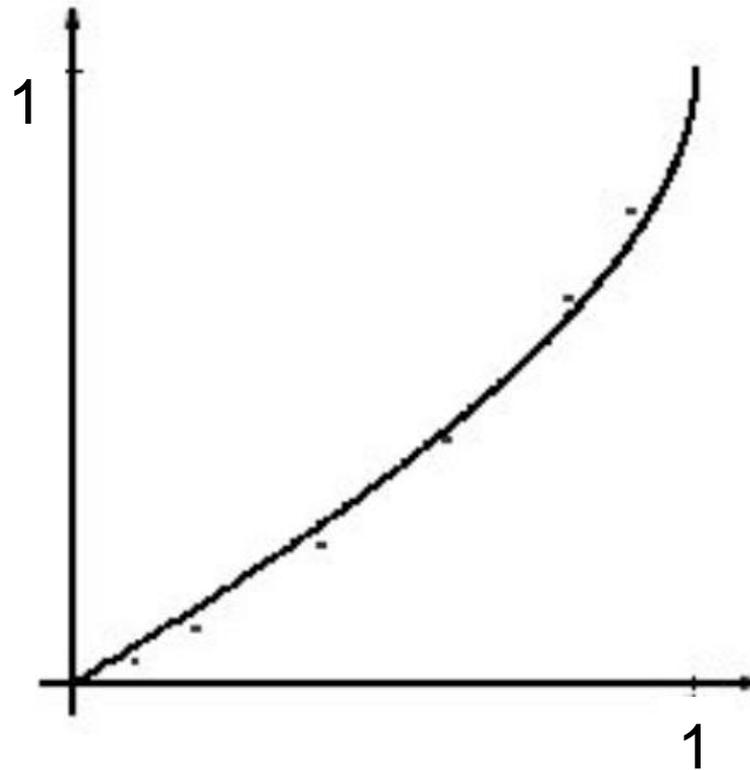
$$\min_{0 < \varepsilon < 1} \sum_{i=1}^n (F_{\varepsilon}(x_i) - y_i)^2$$

Regressionsdaten ohne Kaufkraftkorrektur.

Quelle:

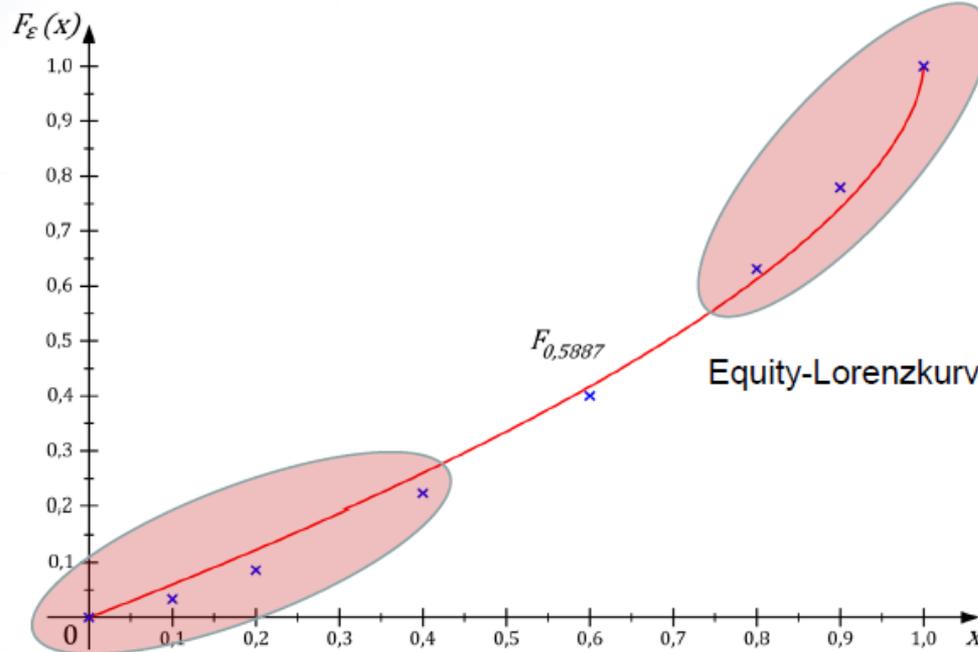
World Development Report, Weltbank, Washington.

## Regression



Equityparameter für optimale Passung 0.57

# Kritik an bisherigen Ergebnissen



Equity-Lorenzkurve für Deutschland (2011)

Datenbasis: World Development Indicators (Weltbank)

-> Die Approximation an den Rändern ist nicht optimal

# Eine „bessere“ Lorenzkurve

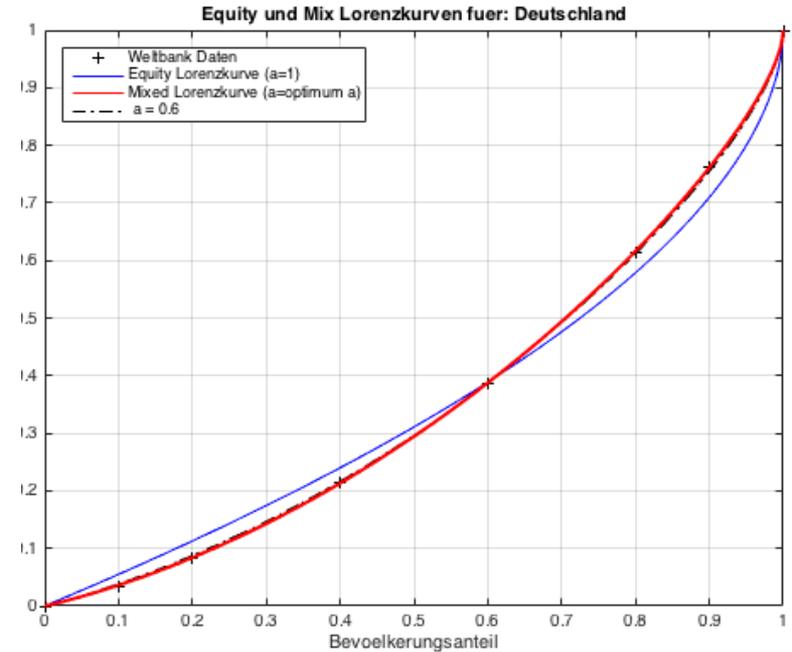
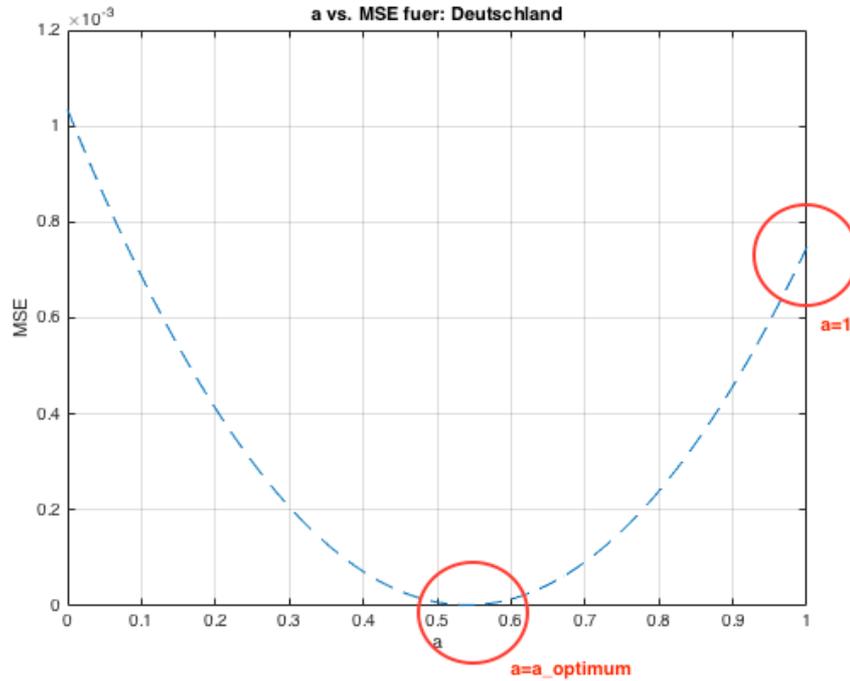


## 2-parametrische Mixed-Lorenzkurven (Pareto und Exponential)

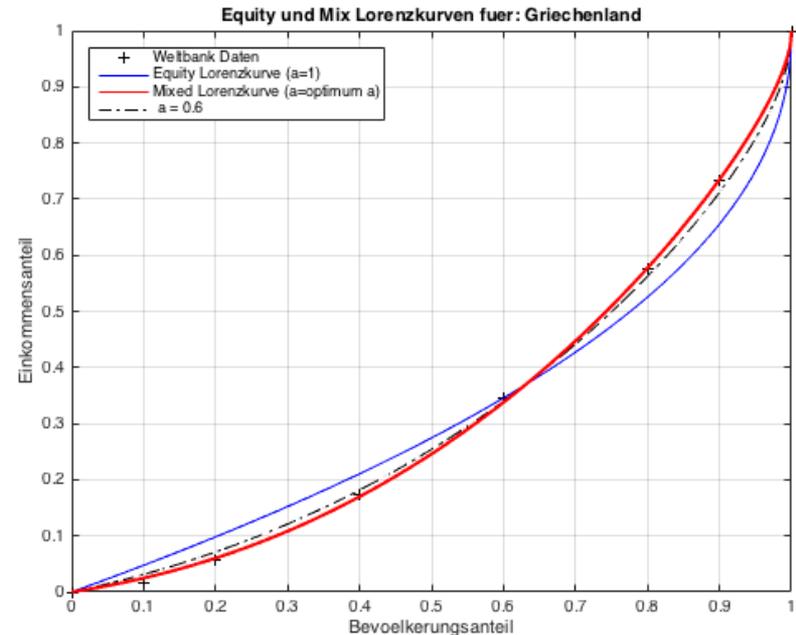
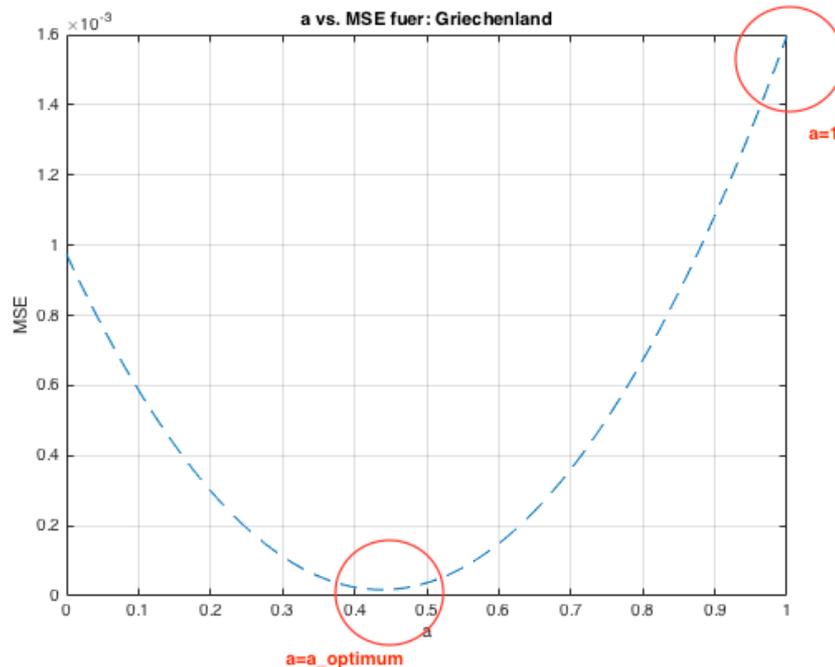
$$F_{\varepsilon,a}(x) = a(1 - (1 - x)^\varepsilon) + (1 - a)x^{1/\varepsilon} \quad 0 \leq a \leq 1, 0 < \varepsilon \leq 1$$

**Erste punktuelle Tests haben ergeben, dass mit dieser Lorenzkurvenschar ein ausgezeichnetes Approximationsverhalten erwartet werden kann.**

## Mixed-Lorenzkurve: Beispiel Deutschland



## Mixed-Lorenzkurve: Beispiel Griechenland



Bei der Modellierung für alle Länder erweist sich  $a = 0.6$  als gute Approximation.

Daten der Weltbank haben keine Fehlerbalken

keine Aussage möglich, ob  $a = 0.6$  innerhalb des Fehlers in der Datenerhebung liegt. Erscheint jedoch wahrscheinlich!

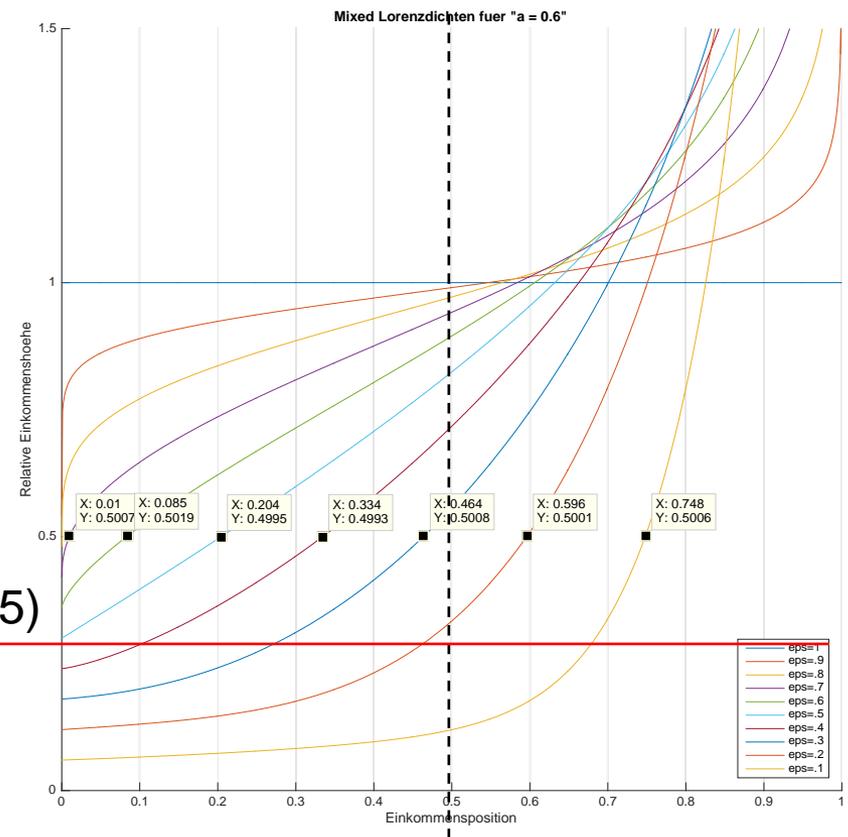
## Neue Einsichten für ungleiche Verteilungen

Mixed-Lorenz Dichteverteilungen  
 $F'(x) = f(x)$

Aussage möglich über Anteil den laut Definition armen Teil der Bevölkerung.

Vergleiche Anteil der „Armen“ für verschiedene Equityparameter

$0.6 * f(0.5)$



## Vergleich verschiedener Armutsdefinitionen

Epsilon	f(0)	X(f(x)=0,5) 50% Durchschnitts Einkommen	X(0,6*f(0,5)) 60% Median
0	0	0,000	0,000
0,02	0,012	0,921	0,125
0,04	0,024	0,868	0,125
0,06	0,036	0,823	0,125
0,08	0,048	0,784	0,156
0,1	0,06	0,748	0,188
0,12	0,072	0,714	0,250
0,14	0,084	0,683	0,297
0,16	0,096	0,653	0,332
0,18	0,108	0,624	0,348
0,2	0,12	0,596	0,352
0,22	0,132	0,568	0,352
0,24	0,144	0,542	0,348
0,26	0,156	0,516	0,342
0,28	0,168	0,489	0,334
0,3	0,18	0,463	0,326
0,32	0,192	0,438	0,316
0,34	0,204	0,412	0,305
0,36	0,216	0,387	0,295
0,38	0,228	0,360	0,283
0,4	0,24	0,334	0,270

0,42	0,252	0,309	0,258
0,44	0,264	0,283	0,244
0,46	0,276	0,256	0,229
0,48	0,288	0,230	0,215
0,5	0,3	0,205	0,199
0,51	0,306	0,191	0,191
0,52	0,312	0,180	0,184
0,54	0,324	0,154	0,168
0,56	0,336	0,129	0,150
0,58	0,348	0,105	0,133
0,6	0,36	0,084	0,116
0,62	0,372	0,063	0,100
0,64	0,384	0,045	0,082
0,66	0,396	0,030	0,066
0,68	0,408	0,019	0,051
0,7	0,42	0,010	0,037
0,72	0,432	0,004	0,026
0,74	0,444	0,002	0,017
0,76	0,456	0,000	0,009
0,78	0,468	0,000	0,004
0,8	0,48	0,000	0,002
0,82	0,492	0,000	0,001

## Vergleich verschiedener Armutsdefinitionen

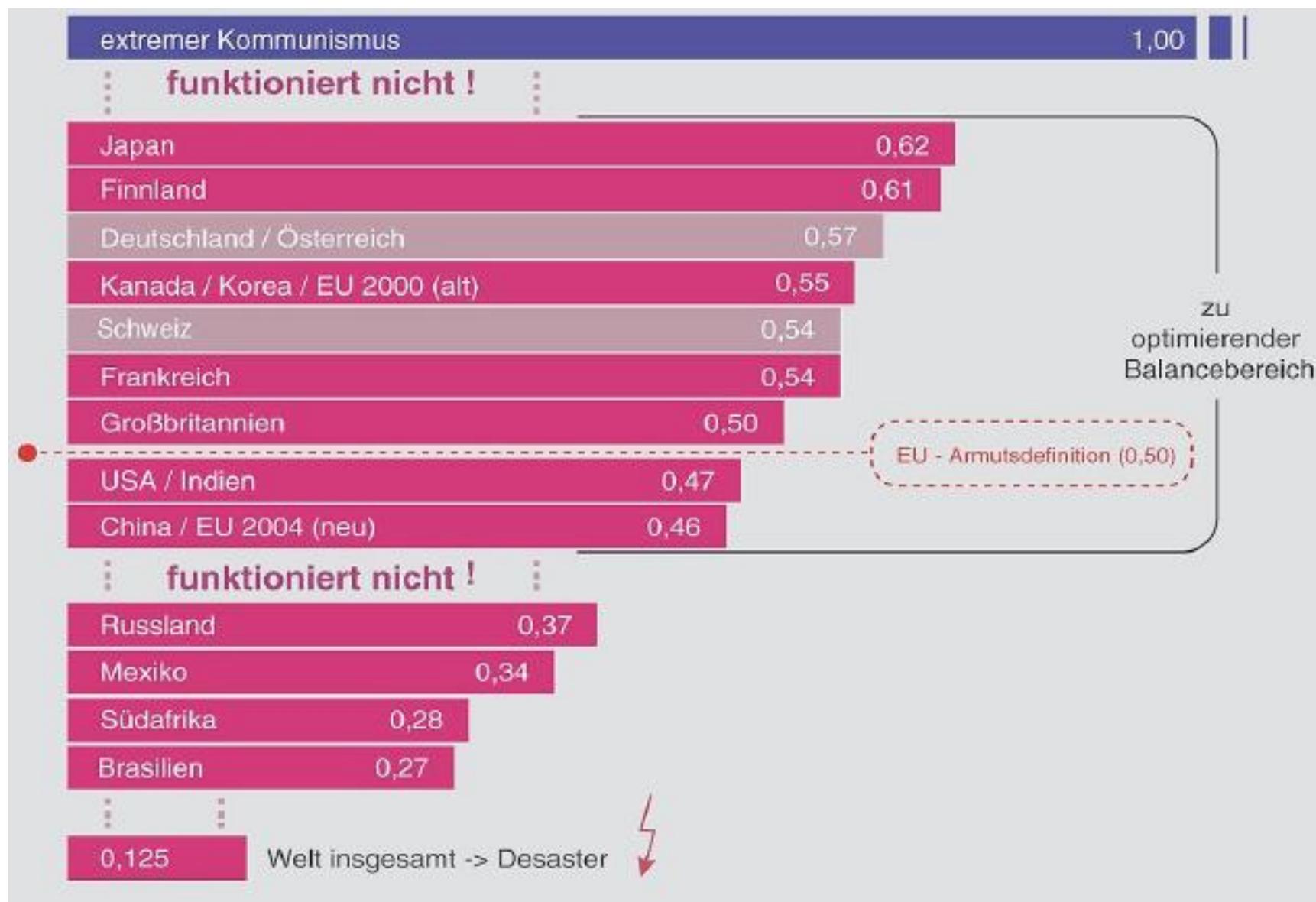
Beide Werte steigen für  $\varepsilon > 0.52$ .

Jedoch steigen die Werte der neuen Definition (median-basiert) schneller als die Werte der alten Definition (durchschnitts-basiert).

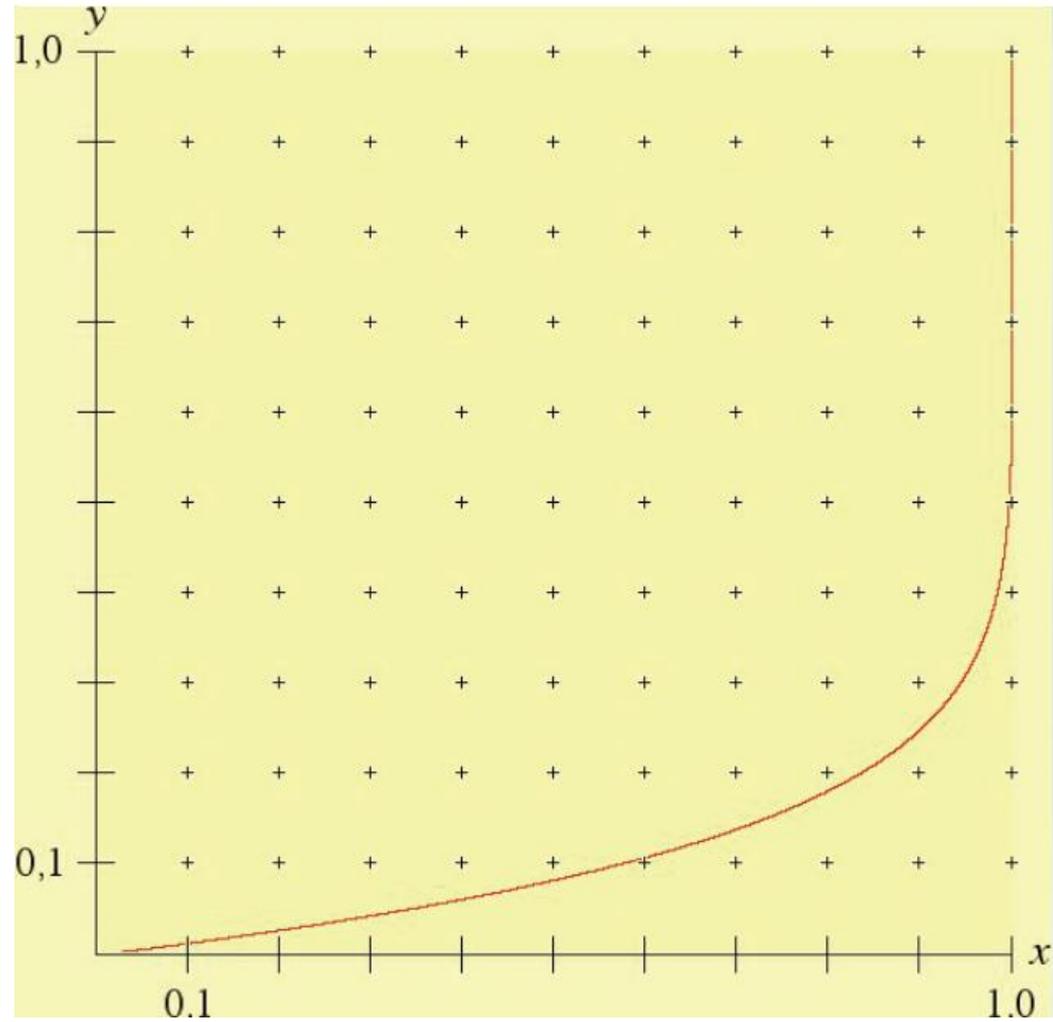
Ungleichheit wird größer mit sinkendem  $\varepsilon$ . Das ist der kritische Punkt: Die Werte für die „neue“ Definition steigen langsamer als die Werte für die alte Definition.

Wenn es das Ziel ist, so wenig arme Menschen wie möglich zu haben und die Ungleichheit steigt, dann ist die neue Definition „besser“ geeignet.

Für  $\varepsilon < 0.52$  ist das Verhalten umgekehrt.



## Weltlorenzkurve



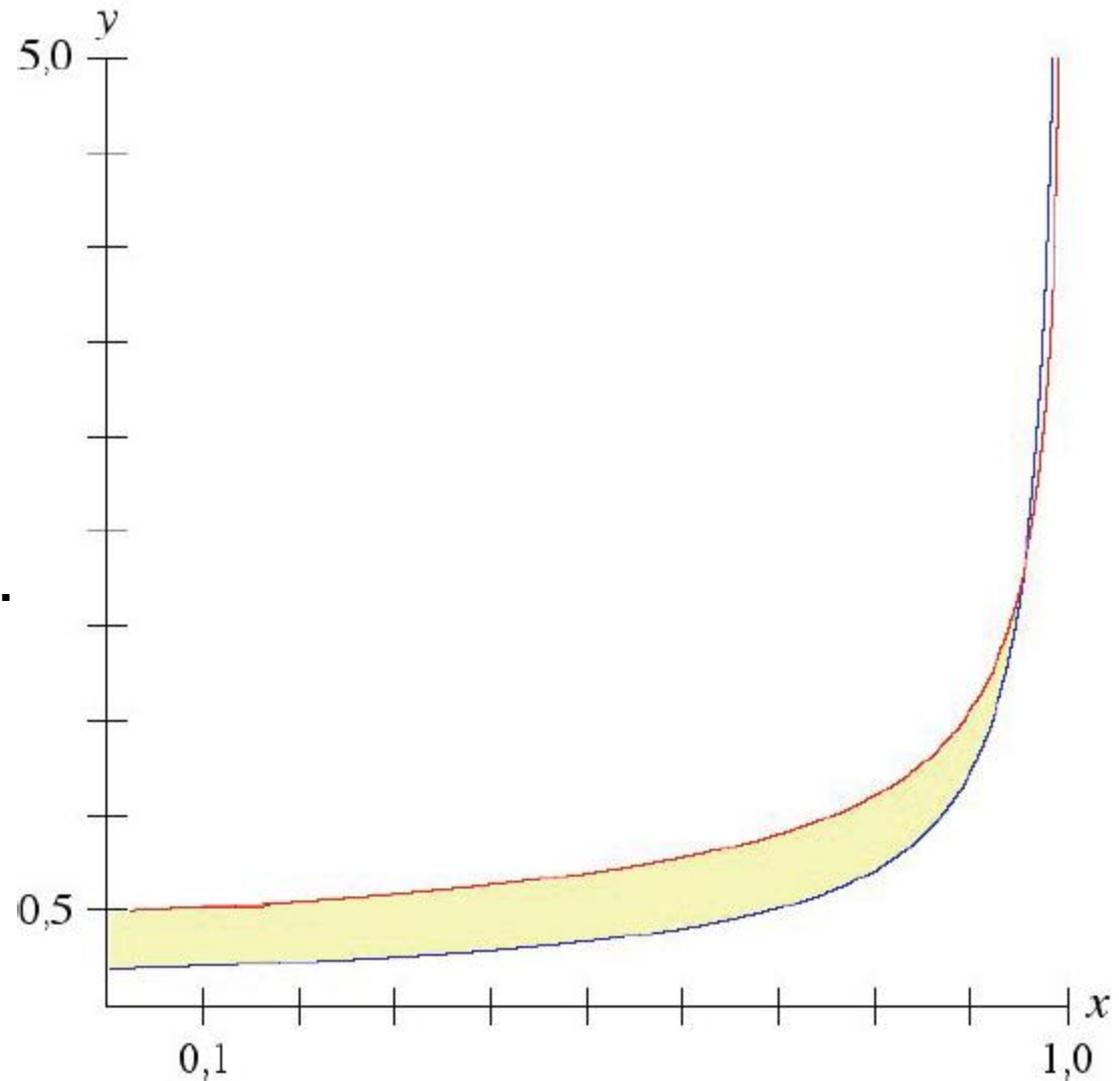
## Umverteilung

### Umverteilung:

- Übergang von einem Equityparameter zu einem anderen
- Umverteilung gemäß Pigou-Dalton Prinzip, d.h. von reich nach arm.

### Beispiel:

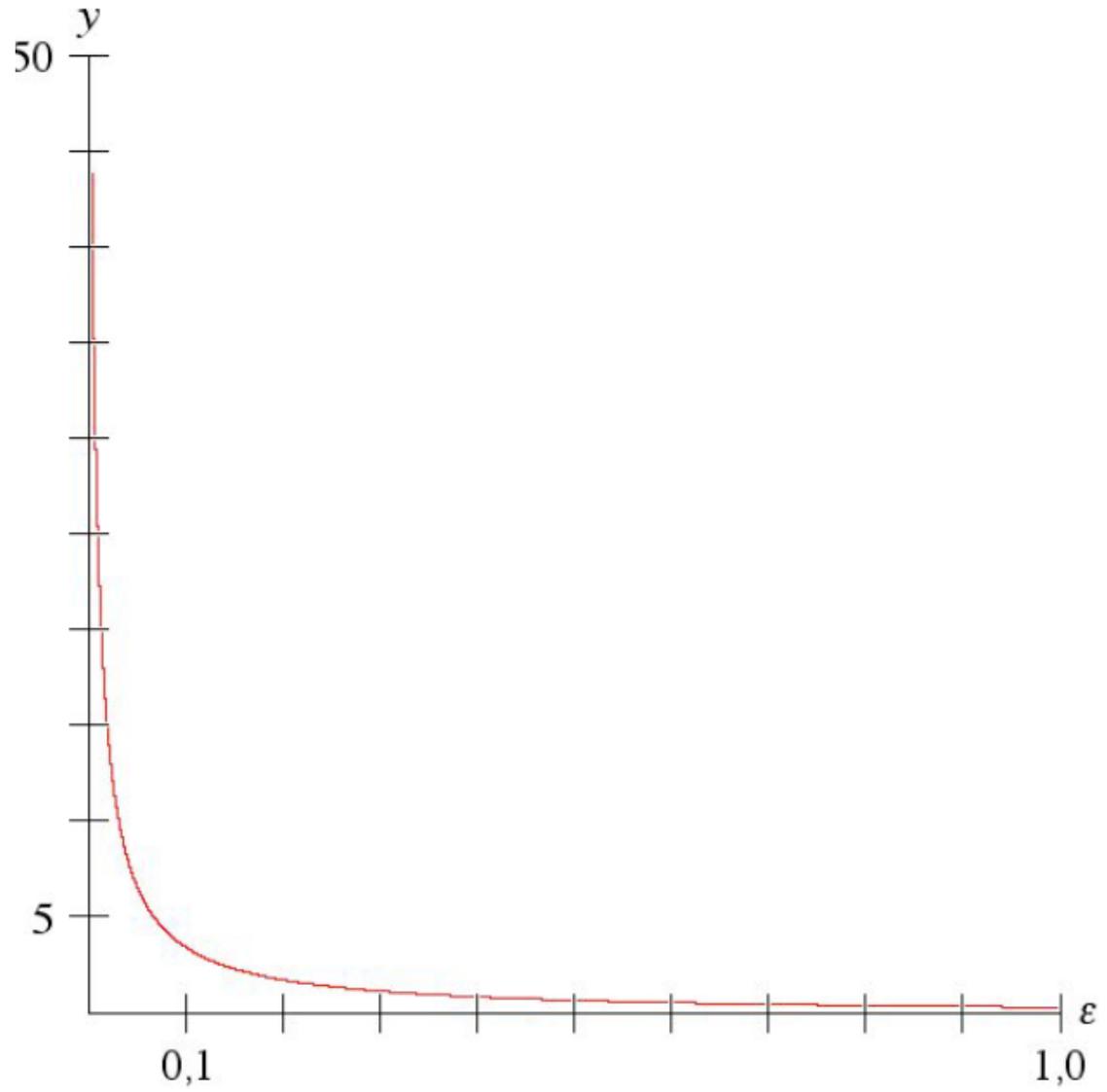
- Equityparameter: 0.2
- Equityparameter: 0.5



## „Abnehmende Grenzumverteilung“

### Beispiel:

0.50 --> 0.51  
entspricht 0.73%  
Umverteilung.



## Brasilianisierung

Begriff und These von Ulrich Beck, Soziologe, LMU:

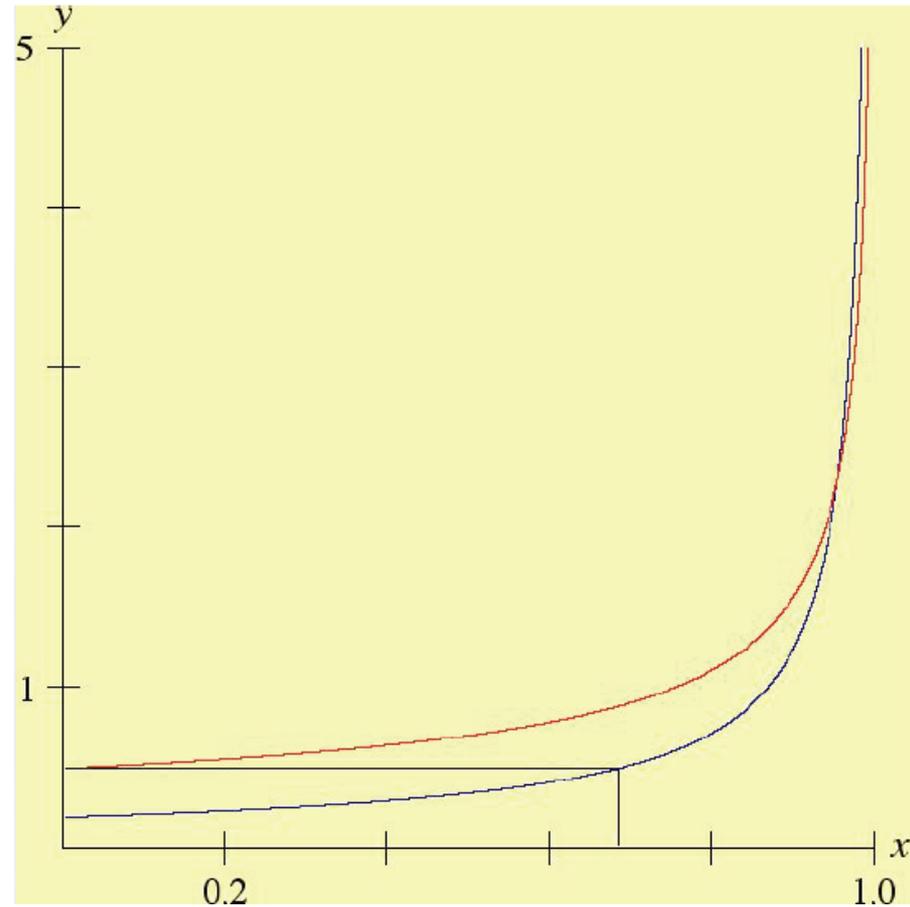
- Veränderung in Europa hin zu mehr sozialer Ungleichheit.
- Was sagt der Equitykalkül dazu?

## Brasilianisierung

### Sind für zwei Gesellschaften:

- relative Größe,
- Verhältnis der Durchschnittseinkommen und
- Equityparameter

bekannt, so kann deren Durchmischung (gemeinsamer Equityparameter) näherungsweise bestimmt werden. („Zahnräder“)



## Brasilianisierung - Entmischung oder Entfaltung

„Entmischung“ oder „Entfaltung“ (Durchmischung rückwärts):

Wenn eine Lorenzkurve vorliegt (z.B. für Welt) und eine *Durchmischung* aus zwei Gesellschaften (arm und reich) unterstellt wird, was ist dann die *beste Aufteilung*?

$$\min_{0 \leq \varepsilon_1, \varepsilon_2, m, b \leq 1} \sum_{i=1}^n (F_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, m, b}(x_i) - y_i)^2$$

## Brasilianisierung

### Größenanteile

	„arm“	„reich“
Deutschland	0.30	0.70
Brasilien	0.56	0.44
Südafrika	0.82	0.18
Welt	0.82	0.18



**Fazit: rein datengetriebene Analyse weltweiter Einkommensverteilung deutet eher auf „Südafrikanisierung“.**

## Gerechtigkeit

### Was ist ein richtiger / gerechter / sinnvoller Ausgleich?

#### John Rawls:

- Chancengleichheit unabhängig von Ausgangszustand
- Differenzprinzip:  
*„... gesellschaftliche Ungleichheiten nur gerechtfertigt, wenn sie auch dem am schlechtesten Gestellten noch zum Vorteil gereichen.“*

→ pragmatisch? demokratisch?

## „Optimaler“ Ausgleich?

### Optimales Ungleichheitslevel ist unbekannt!

**Möglichkeit:** Orientierung an Mittelstand  Definition?

**Vorstellung:** Maximierung des kumulativen Einkommen des Mittelstands

**Idee:** Mittelstand erstreckt sich über alle Einkommen vom 2- bis 5-fachen (o.ä.) des niedrigsten Einkommens.

## Optimaler Ausgleich für Mittelstand

Optimaler Equityparameter kann geschlossen berechnet werden, sobald Mittelstandsgrenzen festgelegt sind.

Middle class income boundaries		Optimal equity parameter	Middle class range for optimal equity parameter	Middle class size
$\beta$	$\alpha$	$\varepsilon$	$[x_{\beta\varepsilon}, x_{\alpha\varepsilon}]$	$x_{\alpha\varepsilon} - x_{\beta\varepsilon}$
2	5	0.4790	[0.7356, 0.9544]	0.2188
1.5	5	0.5338	[0.5809, 0.9683]	0.3874
2	10	0.4272	[0.7018, 0.9820]	0.2802
1.1	10	0.5906	[0.2077, 0.9964]	0.7887
1.01	100	0.5718	[0.0230, 0.9999]	0.9769

## Mittelschicht - Deutschland

Mittelschicht nach DIW: 70% bis 150% des Medians

Median: mind. 50% aller Werte *oberhalb* und  
mind. 50% aller Werte *unterhalb*.

Beispiel:

$\text{median}(1,2,10) = 2 = \text{median}(1,2,1000)$

$\text{median}(1,2,10,12) = 6 = \text{median}(1,2,10,1200)$ .

Mittlere Einkommen (DIW)

Jahr Größenanteile:

2000      0.62

2006      0.54

(Außerdem: Mittelwert wuchs stärker als Median)

## Globalisierungsgewinner und -verlierer

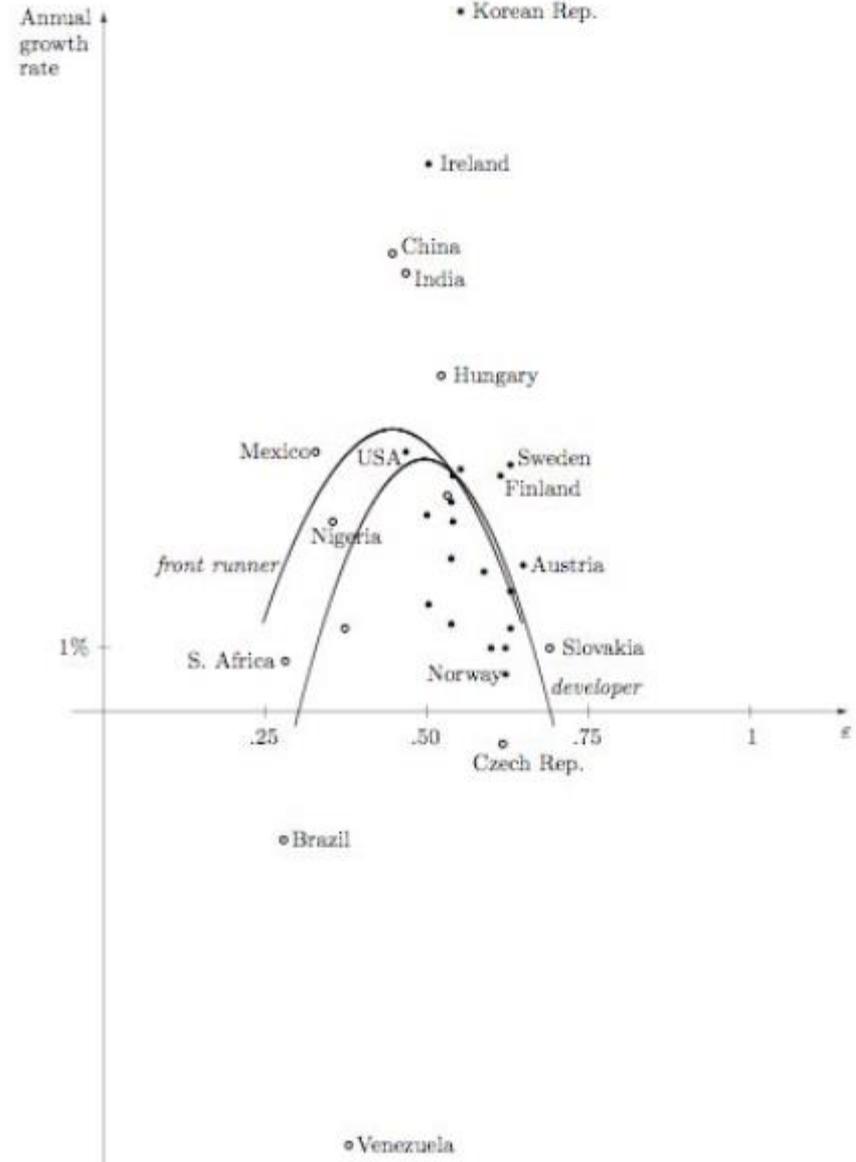
Befund für Privatpersonen (Weltbevölkerung) vage!

Hohe Einkommen	+
Obere Mittelschicht	-
Untere Mittelschicht	+
Geringe Einkommen, Armut	?

## Wachstum und Ausgleich Kuznets Kurven

(Hypothese Simon Kuznets ca. 1940):

- Das Wachstum (als Funktion der Ungleichheit) hat die Form eines „umgekehrten U“
- Kein klarer Befund, da Öffnung der Regressionsparabel sensitiv gegen Wachstumsdaten!



## Wachstum und (durch?) Ausgleich - Bsp. Singapur

**Inflationsbereinigtes, durchschnittliches Wachstum von 1980 bis 1994: 4.5% p.a.**

Gleichzeitig:

Erhöhung des Equityparameters von 0.38 auf 0.42.

Untere Segmente profitieren stärker als obere.

1980		1994	
$x_i$	$y_i$	$x_i$	$y_i$
0.1	0.007738	0.1	0.01696
0.2	0.03608	0.2	0.04694
0.3	0.07486	0.3	0.08739
0.4	0.12349	0.4	0.13914
0.5	0.18434	0.5	0.20295
0.6	0.26042	0.6	0.28239
0.7	0.35606	0.7	0.38134
0.8	0.47996	0.8	0.50660
0.9	0.65013	0.9	0.67372

## Wachstum und Ausgleich

### **Klassische Produktionsfaktoren:**

- Arbeit
- Boden
- Kapital.

### **Neuere Auffassung** (J. Stiglitz und andere):

- Arbeit
- Boden
- Kapital
- soziale Kohäsion
- Wissen ...

### **Capacity building\*:**

the creation of an enabling environment with appropriate policy and legal frameworks, institutional development, including community participation (of women in particular), human resources development and strengthening of managerial systems.

\*United Nations Development Program UNDP

## Wachstum und Ausgleich

### Weitere Forderungen von Stiglitz:

- Zugang zu Wissen für Entwicklungsländer,
- Zugang zu günstigen Medikamenten für Entwicklungsländer,
- Mehr Transparenz internationaler Organisationen (vor allem Weltbank und IWF)