Lösung der Aufgabe 1.3.3

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

In einem hohlkugelförmigen Raumbereich mit $a \leq r \leq b$ existiert eine ortsabhängige Raumladung der Dichte $\varrho_V = \varrho_0 \cos\{\vartheta\}$. Der gesamte übrige Raum ist ladungsfrei, er hat die Dielektrizitätszahl ϵ_0. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke für Aufpunkte auf der $z-$Achse innerhalb und außerhalb der Kugel.

Lösung

$$a \leq r \leq b \qquad : \ \varrho = \varrho_0 * \cos\{\vartheta\}$$

Feld auf z-Achse : x=0 , y=0

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\limits_V\int \frac{\varrho_V\{\vec{r}\,'\}(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, d^3r'$$

Es wird in Kugelkoordinaten weiter gerechnet!

$$\vec{E} = \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} * \int\limits_{r'=a}^{b} \int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta'=0}^{\pi} \frac{(-r' * \cos\{\varphi'\}\sin\{\vartheta'\}, -r'\sin\{\varphi'\}\sin\{\vartheta'\}, z - r'\cos\{\vartheta'\})^T}{[r'^2 \sin\{\vartheta'\} + (z - r'\cos\{\vartheta'\})^2]^{3/2}}$$
$$\cos\{\vartheta'\}\sin\{\vartheta'\} r'^2 dr' d\vartheta' d\varphi'$$

$$= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{r'=a}^{b} \int\limits_{\vartheta'=0}^{\pi} \frac{(0, 0, z - r'\cos\{\vartheta'\})^T 2\pi\cos\{\vartheta'\}\sin\{\vartheta'\} * r'^2}{\left[r'^2 \sin\{\vartheta'\} + (z - r'\cos\{\vartheta'\})^2\right]^{3/2}} dr' d\vartheta'$$

$$Substitution: \qquad r' * \cos\{\vartheta'\} = t\ , \qquad dt = -r' * \sin\{\vartheta'\}\, d\vartheta'$$

$$r'^2 \sin^2\{\vartheta'\} + r'^2\cos^2\{\vartheta'\} = r'^2 \qquad \Rightarrow \; r'^2\sin^2\{\vartheta'\} = 1 - r'^2\cos^2\{\vartheta'\}$$

$$= \frac{-\varrho_0}{2\varepsilon_0} * \int\limits_{r'=a}^{b} \int\limits_{r'}^{-r'} \frac{(0, 0, z - t)^T}{[r'^2 - t^2 + z^2 - 2zt + t^2]^{3/2}}\, t\, dr' dt$$

$$= \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0} * \int\limits_{r'=a}^{b} \int\limits_{-r'}^{r'} \frac{(0, 0, z - t)^T}{[r'^2 + z^2 - 2zt]^{3/2}}\, t\, dr' dt$$

$$\vec{E}_z = \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0} * \int\limits_{r'=a}^{b} \int\limits_{t=-r'}^{r'} \frac{(z - t)t}{[r'^2 + z^2 - 2zt]^{3/2}} dr' dt$$

$$\int \frac{x}{[a - bx]^{3/2}} dx = \frac{2}{b^2}\left(\sqrt{a - bx} + \frac{a}{\sqrt{a - bx}}\right) \qquad \text{Bronstein 136}$$

$$\int \frac{x^2}{[a - bx]^{3/2}} dx = \frac{2}{b^2}\left(\frac{(a - bx)^{3/2}}{3} - 2a\sqrt{a - bx} - \frac{a^2}{\sqrt{a - bx}}\right) \qquad \text{Bronstein 137}$$

$$\text{mit} \qquad a = r^2 + z^2, \qquad b = 2z$$

$$\int\limits_{-r}^{r} \frac{(z - t)t}{[r^2 + z^2 - 2zt+]^{3/2}} dt = \frac{1}{12z^3}\Bigg[3(r^2 - z^2)(r^2 + z^2) * \left(\frac{1}{|r - z|} - \frac{1}{|r + z|}\right)$$
$$+6(2z^2 + r^2)(|r - z| - |r + z|) + |r - z|^3 - |r + z|^3\Bigg]$$

Diese Integral kann wegen den Beträgen nur schwer gelöst werden, deswegen betrachten wir die Terme einzelnen.

$a \leq r \leq b$	$\frac{r^2-z^2}{\lvert r-z\rvert} - \frac{r^2-z^2}{\lvert r+z\rvert}$	$\lvert r-z\rvert - \lvert r+z\rvert$	$\lvert r-z\rvert^3 - \lvert r+z\rvert^3$	
$-b \geq z$	2r	2r	$2r(r^2+3z^2)$	
$-a \geq z > b$	2r	2r	$2r(r^2+3z^2)$	$a \leq r \leq -z$
	2z	-2z	$-2z(z^2+3r^2)$	$-z < r \leq b$
$a \geq z > -a$	2z	-2z	$-2z(z^2+3r^2)$	
$b \geq z > a$	2z	-2z	$-2z(z^2+3r^2)$	$z \leq r \leq b$
	-2r	-2r	$-2r(r^2+3z^2)$	$a \leq r < z$
$z > b$	-2r	-2r	$-2r(r^2+3z^2)$	

$\Uparrow *(r^2+z^2)$ $\quad\Uparrow *r^2$ $\quad\Uparrow$

e $\quad m$ $\quad n$

	$\int_a^b e dr$	$\int_a^b m dr$	$\int_a^b n dr$
$-b \geq z$	$\frac{1}{2}(b^4-a^4)+z^2(b^2-a^2)$	$\frac{1}{2}(b^4-a^4)$	$\frac{1}{2}(b^4-a^4)+3z^2(b^2-a^2)$
$-a \geq z > -b$	$\frac{1}{2}(z^4-a^4)+z^2(z^2-a^2)$	$\frac{1}{2}(z^4-a^4)$	$\frac{1}{2}(z^4-a^4)+3z^2(z^2-a^2)$
	$+\frac{2}{3}z(b^3+z^3)+2z^3(b+z)$	$-\frac{2}{3}(b^3+z^3)$	$-2z^3(b+z)-2z(b^3+z^3)$
$a \geq z > -a$	$\frac{2}{3}z(b^3+a^3)+2z^3(b+a)$	$\frac{2}{3}(b^3+a^3)$	$-2z^3(b-a)-2z(b^3-a^3)$
$b \geq z > a$	$\frac{2}{3}z(b^3-z^3)+2z^3(b-z)$	$-\frac{2}{3}z(b^3-z^3)$	$-2z^3(b-z)-2z(b^3-z^3)$
	$-\frac{1}{2}(z^4-a^4)-z^2(z^2-a^2)$	$-\frac{1}{2}(z^4-a^4)$	$-\frac{1}{2}(z^4-a^4)-3z^2(z^2-a^2)$
$z > b$	$-\frac{1}{2}(b^4-a^4)-z^2(b^2-a^2)$	$-\frac{1}{2}(b^4-a^4)$	$-\frac{1}{2}(b^4-a^4)-3z^2(b^2-a^2)$

$$\vec{E}_z = \frac{\varrho_0}{3\varepsilon_0} * \begin{cases} \frac{-b^4+a^4}{2z^3} & -b \geq z \\ -b-\frac{3}{2}z+\frac{a^4}{2z^3} & -a \geq z > -b \\ -b+a & \text{für } a \geq z > -a \\ -b+\frac{3}{2}z-\frac{a^4}{2z^3} & b \geq z > a \\ \frac{b^4-a^4}{2z^3} & z > b \end{cases}$$