Lösung der Aufgabe 2.1.3

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Eine Stecknadel wird auf das Potential V gebracht. Die Feldstärke in der kugelförmigen Spitze muss kleiner als E_{max} bleiben, damit kein Sprühen in der Luft entsteht. Der Radius der Nadelspitze ist R.

a) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke bei einer homogen geladenen Metallkugel?

b) Welches maximale Potential ist für die Nadel erlaubt, wenn die Nadel wie eine Kugel behandelt werden kann? Für Luft liegt die kritische Feldstärke bei $E_{\text{max}} = 25\,\frac{\mathsf{kV}}{\mathsf{cm}}$, der Radius einer typischen Stecknadelspitze beträgt $50\,\mu\mathsf{m}$.

Lösung

a)

$$\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{r'}| &= (x - r'\sin\theta'\cos\varphi')^2 + (y - r'\sin\theta'\sin\varphi')^2 + (z - r'\cos\theta')^2 \\
&= x^2 - 2xr'\sin\theta'\cos\varphi' + r'^2\sin\theta'^2 + y^2 - 2yr'\sin\theta'\sin\varphi' + \\
&\quad z^2 + r'^2\cos\theta'^2 - 2zr'\cos\theta' \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + r'^2 - 2r'\left(x\sin\theta'\cos\varphi' + yr'\sin\theta'\sin\varphi' + z\cos\theta'\right) \\
&= r^2 + r'^2 - 2rr'\left(\sin\theta'\cos\varphi'\sin\theta\cos\varphi + \sin\theta'\sin\theta\sin\varphi\sin\varphi' + \cos\theta'\cos\theta\right) \\
&= r^2 + r'^2 - 2rr'\left(\cos\theta'\cos\theta + \sin\theta'\sin\theta\cos\left(\varphi - \varphi'\right)\right)
\end{aligned}$$

siehe Übung 4.1.4

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\vec{e_r}\cdot\begin{cases}\frac{1}{r^2} & \text{für} r \geq R \\ \frac{r}{R^3} & \text{für} r < R\end{cases}$$

$$Q = \varrho_0\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E_r\vec{e_r} = \vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\vec{e_\theta}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \qquad V = -\int\limits_{-\infty}^{r} E_r dr'$$

$$r \geq R: \quad V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\bigg|_{-\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} = rE_r$$

$$\begin{aligned} r < R: \qquad V_1 &= \int\limits_{-\infty}^{R} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r'^2} dr' + \int\limits_{R}^{r} \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r'}{R^3} dr' \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R^3} r'^2 \bigg|_{R}^{r} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r^2}{2R^3} = C - \frac{r}{2} \cdot E_r \end{aligned}$$

b)

$$E_{max} = 25\frac{kV}{cm}, \qquad R = 50 \cdot 10^{-4} cm, \qquad r = R$$

$$V(R) = R \cdot E_{max} = 125V$$