

Lösung der Aufgabe 2.2.3

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

In einem Medium mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit σ fließe ein stationärer Strom, dessen x - und y -Komponenten durch

$$j_x = az, \quad j_y = 2by \quad \text{mit } a, b = \text{const.}$$

gegeben seien.

- Berechnen Sie das elektrische Potential !
- Welche Größe hat die z -Komponente der elektrischen Stromdichte?

Lösung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$$

a)

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma} \vec{j}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix}$$

$$-\vec{\nabla} V = \vec{E} = \left(-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z} \right)^T$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{az}{\sigma}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{az}{\sigma} \cdot x + K_1(y, z)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{2by}{\sigma}$$

$$\Rightarrow V = -\frac{b}{\sigma} \cdot y^2 + K_2(x, z)$$

b)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \circ j = 0 &= \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 + 2b + \frac{\partial j_z}{\partial z} \\ \Rightarrow j_z &= -2bz + K_4(x, y)\end{aligned}$$

zu a)

$$\begin{aligned}E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2bz}{\sigma} + \frac{K_4(x, y)}{\sigma} \\ \Rightarrow V &= \frac{b}{\sigma} \cdot z^2 - \frac{K_4(x, y)}{\sigma} \cdot z + K_3(x, y) \\ K_1 &= K_2 = K_3 = d; \quad K_4 = c + ax \\ \Rightarrow V &= -\frac{a}{\sigma}xz - \frac{b}{\sigma}(y^2 - z^2) - \frac{c}{\sigma} \cdot z + d\end{aligned}$$