Lösung der Aufgabe 2.2.4

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

In linearen Medien mit ortsabhängigen Materialparametern $\sigma = \sigma\{\vec{r}\}$ und $\epsilon = \epsilon\{\vec{r}\}$ gilt für den zeitlichen Verlauf der von einem Stromfluss hervorgerufenen Raumladungsverteilung die Beziehung

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}} \frac{\partial \varrho\{\vec{r},t\}}{\partial t} + \varrho\{\vec{r},t\} = \epsilon_0 \vec{J}\{\vec{r},t\} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}} \,,$$

wenn man die Gültigkeit des differentiellen ohmschen Gesetzes voraussetzt.

a) Leiten Sie die obige Gesetzmäßigkeit aus der Kontinuitätsgleichung unter Annahme zeit- und ortsabhängiger Feldgrößen her.

b) Welcher zeitliche Verlauf der Raumladungsdichte ergibt sich ausgehend von einer Anfangsverteilung $\varrho\{\vec{r}, t = 0\}$, wenn die rechte Seite obiger Gleichung zu Null wird, d.h. z.B. im Fall eines homogenen Mediums oder keines Stromflusses?

c) Wie lautet die Zeitabhängigkeit von $\varrho\{\vec{r}, t\}$ bei bekanntem $\vec{J}\{\vec{r}, t\}$?

d) Welcher Zusammenhang kann genutzt werden, um $\vec{J}$ bei vorgegebenen $\varrho\{\vec{r}, t\}$ zu berechnen?

Lösung

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho\{\vec{r},t\} + \vec{\nabla} \circ \vec{j}\{\vec{r},t\} = 0$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{\sigma\{\vec{r}\}}{\varepsilon\{\vec{r}\}\varepsilon_0}\vec{D}\{\vec{r},t\}$$

$$div \vec{j} = \vec{\nabla} \circ \vec{j} = \frac{\sigma\{\vec{r}\}}{\varepsilon\{\vec{r}\}\varepsilon_0}\vec{D}\{\vec{r},t\} \underbrace{div \vec{D}}_{=\varrho} + \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} \cdot \vec{\nabla} \frac{\sigma\{\vec{r}\}}{\varepsilon\{\vec{r}\}} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial t}\varrho\{\vec{r}\,t\} + \frac{\sigma\{\vec{r}\}}{\varepsilon\{\vec{r}\}\varepsilon_0}\varrho\{\vec{r},t\} = -\frac{\varepsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}}\cdot\vec{j}\{\vec{r},t\}\circ\vec{\nabla}\frac{\sigma\{\vec{r}\}}{\varepsilon\{\vec{r}\}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\varepsilon_0\varepsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}}}_{=\tau}\cdot\frac{\partial\varrho\{\vec{r},t\}}{\partial t} + \varrho\{\vec{r},t\} = \varepsilon_0\cdot\vec{j}\{\vec{r},t\}\circ\vec{\nabla}\frac{\varepsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{\tau^2}\cdot\vec{\nabla}\tau$$

b) homogene DGL $\rightarrow$

$$\varrho\{\vec{r},t\} = \varrho\{\vec{r},t=0\}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

c) aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho = -\vec{\nabla}\circ\vec{j}$$

$$\Rightarrow \qquad \varrho\{\vec{r},t\} = \varrho\{\vec{r},t=0\} - \int\limits_0^t \vec{\nabla}\circ\vec{j}\{\vec{r},t'\}dt'$$

d) aus (1):

$$\vec{\nabla}\frac{\sigma\{\vec{r}\}}{\varepsilon\{\vec{r}\}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad div\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}\cdot\varrho$$

$$\vec{\nabla}\frac{\sigma\{\vec{r}\}}{\varepsilon\{\vec{r}\}} \neq 0: \qquad \vec{\nabla}\frac{\sigma}{\varepsilon} = \left|\vec{\nabla}\frac{\sigma}{\varepsilon}\right|\cdot\vec{e_j}$$

aus (2):

$$\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \varrho = \varepsilon_0\left|\vec{\nabla}\frac{\varepsilon}{\sigma}\right|\cdot\underbrace{\vec{e_j}\circ j\cdot\vec{e_j}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \qquad \left|\vec{j}\right| = \frac{1}{\varepsilon_0\left|\vec{\nabla}\frac{\varepsilon}{\sigma}\right|}\left(\varrho + \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}\frac{\partial\varrho}{\partial t}\right)$$