Lösung der Aufgabe 2.3.1

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Auf eine Grenzfläche zwischen zwei homogenen linearen Medien mit den Materialparametern ϵ und σ möge wie in Bild 1 dargestellt ein konstanter Strom der Dichte $\vec{J}_2$ unter dem Winkel θ_2 zur Flächennormalen einfallen.

a) Bestimmen Sie aus den an der Grenzfläche zu erfüllenden Randbedingungen den Winkel θ_1 des Stromflusses im Medium 1.

b) Geben Sie die Größe der sich einstellenden Grenzflächenladungsdichte an.

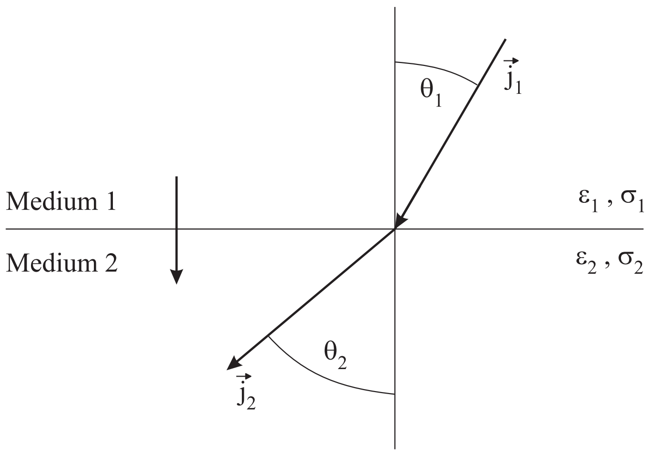

Abbildung 1: Stromfluss über eine Grenzfläche zweier Medien

Lösung

$$\vec{j_1} = \sigma_1 \cdot \vec{E_1}; \qquad \vec{j_2} = \sigma_2 \cdot \vec{E_2}$$

a)

$$E_{tan,1} = E_{tan,2}$$

$$E_2 \cdot \sin\theta_2 = E_1 \cdot \sin\theta_1 \tag{1}$$

$$\frac{j_2}{\sigma_2} \cdot \sin\theta_2 = \frac{j_2}{\sigma_1} \cdot \sin\theta_1 \tag{2}$$

$$\text{und} \qquad j_{norm} = \vec{n} \circ \vec{j_1} = \vec{n} \circ \vec{j_2}$$

$$j_1 \cos\theta_1 = j_2 \cos\theta_2 \tag{3}$$

$$(2):(3) \qquad \Rightarrow \qquad \tan\theta_2 \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \tan\theta_1$$

b)

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ (\vec{D_2} - \vec{D_1}) &= \varrho_s \\
D_{norm,2} - D_{norm,1} &= \varrho_s = D_2 \cdot \cos\theta_2 - D_1 \cdot \cos\theta_1 \\
\varrho_s &= \vec{n} \circ (\varepsilon_2\varepsilon_0\vec{E_2} - \varepsilon_1\varepsilon_0\vec{E_1}) \\
&= \vec{n}\left(\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2} \cdot \vec{j_2} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1} \cdot \vec{j_1}\right)
\end{aligned}$$

c)

$$W = \int \vec{F} \circ d\vec{s} = q \cdot \int_0^r E_r dr$$

$$|\vec{r}| \le a: \qquad W_1 = q \cdot \int_0^r E_r dr = q \cdot \int_0^r C \cdot r dr = q \cdot C\frac{r^2}{2}$$

$$\text{mit} \qquad C = \frac{\varrho_0}{3\varepsilon_0\varepsilon} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$W_1\{|\vec{r}|\} = q \cdot C\frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
|\vec{r}| > a: W_2 &= W_1\{|\vec{r}|\} + \int_a^2 rq \cdot E_r dr \\
&= q \cdot C\frac{a^2}{2} - qCa^3\frac{1}{r}\bigg|_a^r \\
&= qC\frac{a^2}{2} + qC(a^2 - \frac{a^3}{r}) \\
&= \frac{3}{2}qCa^2 - qC\frac{a^3}{r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r \to \infty : W_2 &= \frac{3}{2} q C a^2 \\
q &= \varrho_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \\
\Rightarrow \qquad W_2 &= \frac{3}{2} \frac{4}{3} \frac{1}{3} \pi a^5 \frac{\varrho_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot e^{-2\frac{t}{\tau}} \\
&= \frac{2}{3} \pi a^5 \frac{\varrho_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \cdot e^{-2\frac{t}{\tau}}
\end{aligned}$$