Lösung der Aufgabe 2.3.2

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

In einem unendlich ausgedehnten linearen Medium der Leitfähigkeit σ und der Dielektrizitätszahl $\epsilon\epsilon_0$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine homogene kugelförmige Ladungsverteilung freigesetzt:

$$\varrho\{\vec{r}, 0\} = \begin{cases} \varrho_0 > 0 & \text{für } |\vec{r}| \leq a \\ 0 & \text{für } |\vec{r}| > a \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\varrho\{\vec{r}, t\}$ für $t \geq 0$.

b) Berechnen Sie aus a) die Verschiebungsstromdichte $\vec{D}\{\vec{r}, t\}$ und das elektrische Feld $\vec{E}\{\vec{r}, t\}$, sowie die Stromdichte $\vec{J}\{\vec{r}, t\}$. Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Feldwirkung (Retardierung) wird hier vernachlässigt.

c) Berechnen Sie die elektrische Feldenergie für beliebige Punkte im gesamten Raum. Wie groß ist die Gesamtenergie der Anordnung ($r \to \infty$)?

d) Findet ein Energietransport statt? Verwenden Sie zur Berechnung den Poyntingvektor.

e) Berechnen Sie die bei quasistationärem Ladungsausgleich frei werdende Wärmeenergie. Vergleichen Sie mit der unter c) bestimmten Feldenergie.

Lösung

a)

$$\varrho\{\vec{r}, t\} + \tau \cdot \frac{\partial}{\partial t}\varrho\{\vec{r}, t\} = 0 \qquad \text{homogene Differentialgleichung} \tag{1}$$

$$\Rightarrow \quad \varrho\{\vec{r}, t\} = \varrho\{t = t_0\} \cdot \exp\left\{-\frac{t - t_0}{\tau}\right\} = \begin{cases} \varrho_0 \cdot \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} & |\vec{r}| \leq a \\ 0 & |\vec{r}| \leq a \end{cases} \tag{2}$$

$$\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} \tag{3}$$

b)

$$\vec{\nabla} \circ \vec{D} = \varrho = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\theta \cdot D_r) \right) \tag{4}$$

Kugelsymmetrie : $D_\varphi = D_\theta = 0$

$$\varrho \cdot r^2 \cdot \sin\theta = \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\theta \cdot D_r) \tag{5}$$

$$r^2 \cdot \sin\theta \cdot D_r = \varrho \, \sin\theta \, \frac{r^3}{3} + K_1 \tag{6}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{D}\{\vec{r}, t\} = \left(\varrho\{\vec{r}, t\} \cdot \frac{r}{3} + \frac{K_1}{r^2} \right) \cdot \vec{e}_r \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}\{\vec{r}, t\} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \left(\varrho\{\vec{r}, t\} \cdot \frac{r}{3} + \frac{K_1}{r^2} \right) \cdot \vec{e}_r \tag{8}$$

$$\vec{E}\{|\vec{r}| = 0, t\} = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0 \tag{9}$$

$$E_r\{|\vec{r}| = a, t\} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \left(\varrho\{|\vec{r}| = a, t\} \cdot \frac{a}{3} + \frac{K_1}{a^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{\varrho \cdot \frac{4}{3} \, \pi \, a^3}{4 \, \pi \, \varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{\varrho \, a}{3 \cdot \varepsilon\varepsilon_0} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = 0 \tag{11}$$

$$E_r\{|\vec{r}| > a, t\} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{K_1}{r^2} \right) = \frac{\varrho \cdot a^3}{3 \, \varepsilon\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{\varrho \cdot a^3}{3} \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad E_r\{\vec{r}, t\} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \frac{\varrho_0}{3} \cdot \exp\left\{ -\frac{t}{\tau} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{ll} r & |\vec{r}| \leq a \\ \dfrac{a^3}{r^2} & |\vec{r}| > a \end{array} \right. \tag{13}$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \tag{14}$$

c)

$$W = \int \vec{F} \circ d\vec{s} = q \cdot \int\limits_0^r E_r \, dr \tag{15}$$

$|\vec{r}| \leq a$:

$$W_1 = q \cdot \int\limits_0^r E_r \; dr = q \cdot \int\limits_0^r C \cdot r \; dr = q \cdot \frac{r^2}{2} \tag{16}$$

mit $C = \dfrac{\varrho_0}{3\;\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \exp\left\{-\dfrac{t}{\tau}\right\}$

$$W_1\{|\vec{r}| = a\} = q \cdot C \cdot \frac{a^2}{2} \tag{17}$$

$|\vec{r}| > a$:

$$\begin{aligned}
W_2 &= W_1\{|\vec{r}| = a\} + q \cdot \int\limits_a^r E_r \; dr && (18)\\
&= q \cdot C \cdot \frac{a^2}{2} - q \cdot C \cdot a^3 \cdot \left.\frac{1}{r}\right|_a^r && (19)\\
&= q \cdot C \cdot \frac{a^2}{2} + q \cdot C \cdot \left(a^2 - \frac{a^3}{r}\right) && (20)\\
&= \frac{3}{2} \cdot q \cdot C \cdot a^2 - q \cdot C \cdot \frac{a^3}{r} && (21)
\end{aligned}$$

$r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
W_2 &= \frac{3}{2} \cdot q \cdot C \cdot a^2 && (22)\\
q &= \varrho_0 \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 && (23)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad W_2 = \underbrace{\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{\frac{2}{3}} \cdot \; \pi \cdot a^5 \cdot \frac{\varrho_0^2}{\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \exp\left\{-2\frac{t}{\tau}\right\} \tag{24}$$