Lösung der Aufgabe 2.4.5

Überarbeitet: JueM 23.05.2016

Aufgabe

Aufgabe wie in der Klausur

Ein unendlich langer metallischer Hohlzylinder mit Innenradius a und Außenradius b ist wie in Abbildung 1 gezeichnet in ein Dielektrikum der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ mit der Raumladungsdichte $\varrho_2 = \varrho_0$ eingebettet. Der Metallzylinder ist mit einem Gas der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ und der Ladungsdichte $\varrho_1 = \varrho_0 \frac{\varrho}{a}$ gefüllt, und liegt auf dem Potential $V = U$. Die zylindrische Außenhaut des Dielektrikums ist mit einem geerdeten Metallbelag versehen.

Nehmen Sie an, dass die z-Achse und die Zylinderachse zusammenfallen. Wie lautet dann der Potentialverlauf im gesamtem Raum $0 \leq \rho \leq c$?

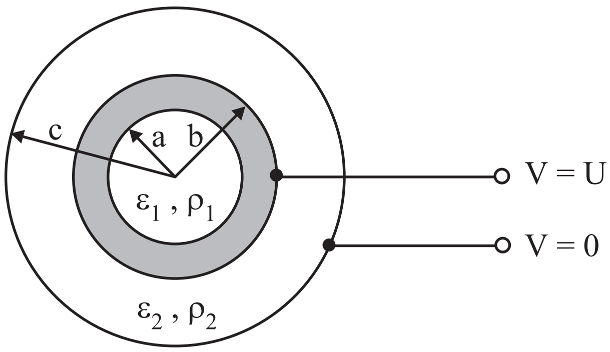

Abbildung 1: Querschnitt durch die Leiteranordnung. Die Zylinderachse verläuft senkrecht zur Zeichenebene.

Zusatzfragen für die Übung

a) Welche Symmetrien können in dieser Aufgabe verwendet werden?

b) Wie lautet das Gaußsche Gesetz in differentieller Form unter Berücksichtigung obiger Symmetrien?

c) Welche Randbedingungen können verwendet werden?

d) Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen in der Anordnung?

e) Wie lautet die dielektrische Verschiebung für Punkte innerhalb des Hohlzylinders? Welche Größe hat das zugehörige Potential unter Berücksichtigung der Randbedingungen?

f) Wie lautet die dielektrische Verschiebung für Punkte außerhalb des Hohlzylinders? Welche Größe hat das zugehörige Potential unter Berücksichtigung der Stetigkeits- und Randbedingungen?

Lösung

a) Da der Zylinder unendlich lang ist, kann $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ angenommen werden. Zusätzlich deutet sich eine Rotationssymmetrie an, also $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$. Dies wird auch nicht durch die Angaben für die Ladungsdichten gestört und gilt somit.

b) Das Gaußsche Gesetz für die dielektrische Verschiebung in differentieller Schreibweise lautet in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \circ \vec{D} &= \varrho \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \vec{D} \circ \vec{e}_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\vec{D} \circ \vec{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{D} \circ \vec{e}_z &= \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrien resultiert aus $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ dass das elektrische Feld als $\vec{E} = E\vec{e}_\rho$ geschrieben werden kann und somit auch $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = D\vec{e}_\rho$. Somit ergibt sich

$$\vec{\nabla} \circ \vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D) \quad = \quad \varrho$$

c) Die Randbedingungen lauten $V\{\rho = a\} = V\{\rho = b\} = U$ und $V\{\rho = c\} = 0$.

d) Es gibt keine inneren Grenzflächen ohne Randbedingungen. Daher entfallen die Stetigkeitsbedingungen.

e) Die dielektrische Verschiebung für Punkte innerhalb des Hohlzylinders lautet:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_1) &= \varrho_0 \frac{\rho}{a} \\ \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho D_1) &= \frac{\varrho_0}{a} \cdot \rho^2 \\ \rho D_1 &= \frac{\varrho_0}{a} \cdot \frac{\rho^3}{3} + c_1 \\ D_1 &= \frac{\varrho_0}{a} \cdot \frac{\rho^2}{3} + \frac{c_1}{\rho} \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante c_1 muss bestimmt werden. Dies erfolgt über das Gaußsche Gesetz

$$\oiint_{S_\mathrm{V}} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iiint_V \varrho \, \mathrm{d}^3 r = Q_\mathrm{V}$$

Dabei wird das Oberflächenintegral als Zylinder um die z-Achse gewählt. Boden und Deckel haben Normalen in z-Richtung und ergeben wegen des radialen Feldes keinen Beitrag. Es bleibt also die Integration über den Zylindermantel mit $\mathrm{d}^2\vec{r} = \rho \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z \vec{e}_\rho$, so dass sich für die eingeschlossenen Ladung

$$Q_\mathrm{V} = 2\pi z \frac{\varrho_0}{a} \cdot \frac{\rho^3}{3} 2\pi z + 2\pi z c_1$$

ergibt. Im Grenzfall $\lim \rho \to 0$ muss diese verschwinden, da hier ja keine konzentrierte Ladung vorliegt. Damit ergibt sich $c_1 = 0$.

Das Potenzial lässt sich nun einfach aus $V = \int \frac{D}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} \mathrm{d}\rho$ zu

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{\varrho_0}{3a\varepsilon_0\varepsilon_1} \cdot \int \rho^2 \, d\rho \\ &= -\frac{\varrho_0 \rho^3}{9a\varepsilon_0\varepsilon_1} + c_2 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} U = V_1\{\rho = a\} &= c_2 - \frac{\varrho_0 a^2}{9\varepsilon_0\varepsilon_1} \\ c_2 &= U + \frac{\varrho_0 a^2}{9\varepsilon_0\varepsilon_1} \\ V_1 &= \frac{\varrho_0}{9\varepsilon_0\varepsilon_1} a^2 \left(1 - \frac{\rho^3}{a^3}\right) + U \end{aligned}$$

f) Wie oben wird zunächst das D-Feld und dann das Potenzial berechnet.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho D_2) &= \varrho_0 \\ D_2 &= \varrho_0 \frac{\rho^2}{2} + \frac{d_1}{\rho} \\ V_2 &= \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_2} \int \frac{d_1}{\rho} - \frac{\varrho_0}{2}\rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_2} \left(d_1 \ln\{\rho\} - \frac{\varrho_0}{6}\rho^3 + d_2 \right) \end{aligned}$$

Mit der Randbedingung bei $V_2\{\rho = c\} = 0$ resultiert

$$V_2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}\left(d_1 \ln\left\{\frac{c}{\rho}\right\} - \frac{\varrho_0}{6}(\rho^3 - c^3)\right)$$

und mit der dritten Randbedingung $V\{b\} = U$

$$U = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}\left(d_1 \ln\left\{\frac{c}{b}\right\} - \frac{\varrho_0}{6}(c^3 - b^3)\right)$$

$$V_2 = U \frac{\ln\left\{\frac{c}{\rho}\right\}}{\ln\left\{\frac{c}{b}\right\}} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}\frac{\varrho_0}{6}\left(\frac{\ln\left\{\frac{c}{\rho}\right\}}{\ln\left\{\frac{c}{b}\right\}}(b^3 - c^3) - (\rho^3 - c^3)\right)$$