Lösung der Aufgabe 2.5.2

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Für den Widerstand zwischen zwei Elektroden gilt der Zusammenhang

$$R = (V_1 - V_2) / I \quad .$$

Die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ hängt in isotropen Medien gemäß

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

von der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der Leitfähigkeit σ ab (differentielles Ohmsches Gesetz).

a) Drücken Sie die Spannungsdifferenz und den Gesamtstrom I durch geeignete Integrale aus, die die elektrische Feldstärke enthalten.

Die Kapazität einer Anordnung von zwei Elektroden ist gemäß

$$C = Q / (V_1 - V_2)$$

definiert, wobei Q die Ladung ist, die auf einer der Elektroden durch die Potentialdifferenz entsteht.

b) Geben Sie auch hier jeweils ein Integral zur Berechnung von Q und $V_1 - V_2$ an.

Zwischen zwei Elektroden sei zunächst ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon\epsilon_0$ angeordnet. Anschließend befinde sich ein leitfähiges Material mit der Leitfähigkeit σ zwischen den Elektroden.

c) Geben Sie das Produkt RC für den Fall an, dass beide Materialkonstanten keine Ortsabhängigkeit aufweisen.

d) Berechnen Sie die Kapazität eines Kugelkondensators mit dem Radius r_1 der Innenelektrode und r_2 der Außenelektrode, der ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon\epsilon_0$ enthält.

Der Zwischenraum werde durch ein Material der Leitfähigkeit σ ersetzt.

e) Wie groß ist der Widerstand zwischen den Elektroden?

Lösung

a)

$$U = -\int_1^2 \vec{E} \circ d\vec{s} = -\int_1^2 E\ ds \tag{1}$$

$$\vec{j}\{\vec{r}\} = \sigma\{\vec{r}\} \cdot \vec{E}\{\vec{r}\} \tag{2}$$

$$I = \iint_S \vec{j}_v \circ d^2\vec{S} = \iint_S \sigma \cdot \vec{E} \circ d^2\vec{S} = \iint_S \sigma \cdot E\ d^2S \tag{3}$$

b)

$$Q = \iint_S \varrho_s\ d^2S = \iint_S D\ d^2S = \varepsilon\varepsilon_0 \iint_S E\ d^2S \tag{4}$$

$$U = -\int_1^2 E\ ds \tag{5}$$

c)

$$R \cdot C = \frac{Q}{U} \cdot \frac{U}{I} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} \tag{6}$$

d)

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \text{für } r_1 \leq r \leq r_2 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad U = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}\ dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) \tag{8}$$