# Lösung der Aufgabe 3.1.2

*Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!*

## Aufgabe

Eine einlagige, gerade Spule mit kreisförmigen Querschnitt (Querschnittsradius a) nach Abbildung 1 besteht aus $N$ Windungen eines sehr dünnen Drahtes, die in Form einer Schraubenlinie gewickelt sind. Die Länge der Spule ist $l$. Die Achse der Spule möge mit der z-Achse eines gewählten Koordinatensystems zusammenfallen. Die Spule wird von einem Strom der Stromstärke I durchflossen.

a) Berechnen Sie die z-Komponente der magnetischen Flussdichte für Aufpunkte auf der z-Achse.

b) Wie groß ist die z-Komponente der magnetischen Flussdichte im Mittelpunkt der Spule bei $z' = 0$ ?

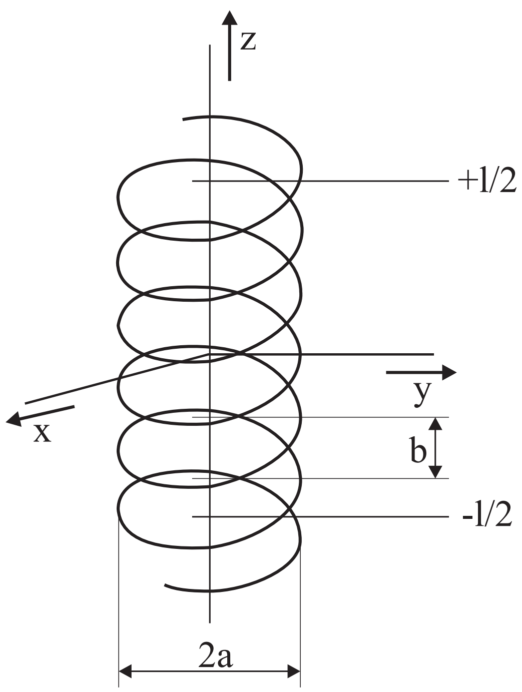


Abbildung 1: Zylindrische Spule mit dünner Wicklung und kreisförmigen Querschnitt

## Lösung

a)

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint\limits_V \vec{j_v}\{\vec{r}\} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} d^3r'$$

Schraubenlinie

$$\vec{r'} = \begin{pmatrix} a\cos(2\pi s) \\ a\sin(2\pi s) \\ ms \end{pmatrix}, \qquad s = -\frac{N}{2} \cdots \frac{N}{2}$$

Steigung pro Windung:

$$m = \frac{l}{N}$$

$$\iiint\limits_V \vec{j_v}\{\vec{r'}\} d^3r' \qquad \rightarrow \qquad \int I d\vec{l}$$

$$d\vec{l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial s} \cdot ds = \begin{pmatrix} -2\pi a\sin(2\pi s) \\ 2\pi a\cos(2\pi s) \\ m \end{pmatrix} ds$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad\qquad dz' = m \cdot ds$$

$$d^3r' = \varrho' d\varrho' d\phi' dz' = a \cdot dz' = am \cdot ds, \qquad \varrho' = a, \qquad \phi' = 2\pi \cdot s$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}\{\vec{r'}\} &= \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \cdot \int\limits_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{\begin{pmatrix} -2\pi a\sin(2\pi s) \\ 2\pi a\cos(2\pi s) \\ m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cos(2\pi s) \\ -a\sin(2\pi s) \\ z - ms \end{pmatrix}}{[a^2 + (z - ms)^2]^{\frac{3}{2}}} mds \\
B_z\{\vec{r'}\} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int\limits_{-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} \frac{2\pi a^2}{[a^2 + (z - ms)^2]^{\frac{3}{2}}} amds
\end{aligned}$$

$$t = z - ms, \qquad dt = -mds$$

$$\Rightarrow B_z\{z\} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot a^3 \cdot \underbrace{\int\limits_{z+\frac{l}{2}}^{z-\frac{l}{2}} \frac{-1}{[a^2+t^2]^{\frac{3}{2}}} dt}_{=:I}$$

$$I = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\Bigg|_{z+\frac{l}{2}}^{z-\frac{l}{2}} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2+(z+\frac{l}{2})^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2+(z-\frac{l}{2})^2}}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad B_z\{z\} = \frac{\mu_0 I a}{2} \cdot \left(\frac{z+\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2+(z+\frac{l}{2})^2}} - \frac{z-\frac{l}{2}}{\sqrt{a^2+(z-\frac{l}{2})^2}}\right)$$

b)

$$B_z|_{z=0} = \frac{\mu_0 I a}{2} \cdot \frac{l}{\sqrt{a^2+(\frac{l}{2})^2}}$$