Lösung der Aufgabe 3.1.6

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Ein zylindersymmetrisches Magnetfeld wird durch zylindersymmetrische Ströme erzeugt, die keine Komponente in Richtung der Achse haben. Geben Sie einen (nicht notwendigerweise geschlossenen) Ausdruck für das Vektorpotential $\vec{A}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$ auf der Symmetrieachse außerhalb der erzeugenden Quellen unter der Voraussetzung an, dass dort keine Singularitäten vorhanden sind. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann die $z-$ Achse als Symmetrieachse und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (statische Felder) gewählt werden.

Lösung

Aufgabenstellung:

$$\vec{J} \cdot \vec{e_{\mathrm{z}}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{z}}}$$

$$\begin{aligned}
0 = \vec{\nabla} \circ \vec{A} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{r}}}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r\vec{A} \cdot \vec{e_{\varphi}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{z}}}\right) \\
\frac{\partial}{\partial \varphi} &= 0 \qquad \Rightarrow \\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{r}}}\right) &= 0 \\
\Rightarrow \qquad \vec{A}\vec{e_{\mathrm{r}}} &= \frac{1}{r} \cdot f\{\varphi, z\} \qquad \text{oder} \qquad \vec{A}\vec{e_{\mathrm{r}}} = 0
\end{aligned}$$

keine Singularitäten auf der Achse

$$\Rightarrow \qquad \vec{A}\vec{e_{\mathrm{r}}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{A} = A \cdot \vec{e_{\varphi}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int\int\int\limits_{V'} \frac{\vec{J'} \cdot \vec{e_{\varphi}}}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d^3r' \cdot \vec{e_{\varphi}}$$

Achse:

$$\vec{r} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int\limits_{V'} \frac{\vec{J'} \cdot \vec{e_{\varphi}}}{|\vec{r'}|} d^3r'$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial z} A \cdot \vec{e_{\mathrm{r}}} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A) \cdot \vec{e_{\mathrm{z}}}$$

Zylindersymmetrie:

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\vec{B} = B \cdot \vec{e_{\mathrm{z}}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A) \cdot \vec{e_{\mathrm{z}}}$$

Achse:

$$\begin{aligned} B\{0\} &= \lim_{r \to 0} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A) \right) \\ &= \lim_{r \to 0} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \int\limits_{V'} J\{r'\} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{|\vec{r} - \vec{r'}|} d^3 r' \right) \end{aligned}$$