Lösung der Aufgabe 3.2.3

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Die magnetische Kraft auf das schraffiert gezeichnete Leiterstück der Anordnung im untenstehender Abbildung 1 soll berechnet werden. Die Querschnittsdimensionen des Leiters seien vernachlässigbar.

a) Wie lautet die Lorentzkraft?

b) Wie lautet die Stromdichte in den einzelnen Leiterstücken?

c) Welche magnetische Flussdichte wird von den Leiterstücken im schraffierten Bereich erzeugt?

d) Welche Gesamtkraft wirkt auf den schraffierten Bereich?

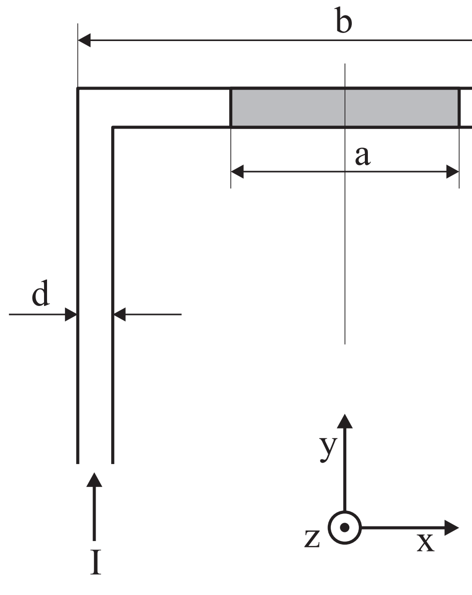

Abbildung 1: Anordnung einer unendlich ausgedehnten Leiterschleife. Die Kraft auf das schraffierte Leiterstück ist unter der Voraussetzung $d \ll b$ gesucht.

Lösung

a)

$$\vec{F_L} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{b})$$

b)

Bereich I:

$$\vec{j_v}\{\vec{r}\} = \frac{I}{d}\delta\{z\}\vec{e_y} \qquad -\frac{b}{2} \leq x \leq -\frac{b}{2} + d$$

Bereich II:

$$\vec{j_v}\{\vec{r}\} = \frac{I}{d}\delta\{z\}\vec{e_x}$$

Bereich III:

$$\vec{j_v}\{\vec{r}\} = -\frac{I}{d}\delta\{z\}\vec{e_y} \qquad \frac{b}{2} - d \leq x \leq \frac{b}{2}$$

I:

$$\begin{aligned}
\vec{j_v}\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'}) &= \frac{I}{d} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{I}{d} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{I}{d} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x - x' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

II:

$$\vec{j_v}\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'}) = 0$$

III:

$$\vec{j_v}\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'}) = -\frac{I}{d} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{d} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x - x' \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_o}{4\pi} \int\int\int_V \frac{\vec{j_v}\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} d^3r'$$

I:

$$\vec{B}_I\{\vec{r}\} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \cdot \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}+d} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{(0,0,x-x')^T}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2\right]^{\frac{3}{2}}} dy'dx'$$

Subst.: $t = y - y'$; dt=-dy'

$$\begin{aligned} \int\limits_{y}^{\infty} \frac{1}{\left[(x-x')^2+t^2\right]^{3/2}} dt &= \frac{t}{(x-x')^2 \sqrt{(x-x')^2+t^2}} \Big|_y^\infty \\ &= 1 - \frac{y}{(x-x')\left[(x-x')^2+t^2\right]^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_{Iz}\{\vec{r}\} = -\frac{\mu_o}{4\pi} \cdot \frac{I}{d} \int\limits_{-\frac{b}{2}}^{-\frac{b}{2}+d} \left((x-x') - \frac{y}{(x-x')\sqrt{(x-x')^2+y^2}} \right) dx'$$

Subst.: $s = x - x'$; $ds = -dx'$

$$\int\limits_{x+\frac{b}{2}-d}^{x+\frac{b}{2}} \left[s - \frac{y}{s\sqrt{s^2+y^2}} \right] ds = \left[\frac{s^2}{2} + \frac{y}{y} \cdot \ln\left(\frac{y+\sqrt{s^2+y^2}}{s} \right) \right]_{x+\frac{b}{2}-d}^{x+\frac{b}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 - \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + 2d\left(x+\frac{b}{2}\right) - d^2 \right) + \ln \frac{\left(y+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+y^2}\right)\left(x+\frac{b}{2}-d\right)}{\left(x+\frac{b}{2}\right)\left(y+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}-d\right)^2+y^2}\right)}$$

II:

$$
\begin{aligned}
B_{\vec{IIz}}\{\vec{r}\} &= \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot\frac{I}{d}\int\limits_{\frac{b}{2}-d}^{\frac{b}{2}}\left((x-x')-\frac{y}{(x-x')\sqrt{(x-x')^2+y^2}}\right)dx' \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot\frac{I}{d}\left[\frac{s^2}{2}+\ln\frac{y+\sqrt{s^2+y^2}}{s}\right]_{x-\frac{b}{2}}^{x-\frac{b}{2}+d} \\
&= \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot\frac{I}{d}\left[\frac{1}{2}\left(2\left(x-\frac{b}{2}\right)d+d^2\right)+\ln\frac{\left(y+\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}+d\right)^2+y^2}\right)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{\left(x-\frac{b}{2}+d\right)\left(y+\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+y^2}\right)}\right]
\end{aligned}
$$

$$
B_z\{\vec{r}\} = \frac{\mu_o}{4\pi}\cdot\frac{I}{d}\left[d^2-\frac{b}{2}d+\ln\frac{\left(y+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}-d\right)^2+y^2}\right)\left(y+\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}+d\right)^2+y^2}\right)\left(x-\frac{b}{2}\right)}{\left(x-\frac{b}{2}+d\right)\left(y+\sqrt{\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+y^2}\right)\left(y+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+y^2}\right)}\right]
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= q\cdot\vec{v}\times\vec{B} \\
&= I\cdot\vec{l}\times\vec{B} \\
&= I\cdot a\vec{e_x}\times B_z\vec{e_z} \\
&= I\cdot a\cdot B_z\vec{e_y}
\end{aligned}
$$