Lösung der Aufgabe 4.2.2

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Auf einer Leiterplatte fließt der Strom I. Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ in integraler Schreibweise ist für den Fall gesucht, dass der Strom bei $z = 0$ in der x-y-Ebene im Kreis mit Radius R fließt.

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt der Leiterschleife. Die Kreisachse ist parallel zur z-Richtung.

b) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}$ in Zylinderkoordinaten an. Verwenden Sie Einheitsvektoren des Aufpunktes und zylindrische Parameter.

c) Werten Sie das Integral für $\vec{A}$ bis auf die φ'-Komponente aus. Wie hängt $\vec{A}$ von der Azimutalkomponente φ ab?

Das Vektorpotential kann bei quadratischer Stromführung (Seitenlänge a) geschlossen angegeben werden.

d) Skizzieren Sie die neue Anordnung. Auch hier liege der Koordinatenursprung in der Mitte. Die Kanten des Quadrates sind parallel zur x- und y-Achse.

e) Geben Sie die Stromdichte an.

f) Wie lautet die Lösung für $\vec{A}$?

g) Zur abkürzenden Schreibweise können die Vektoren vom Aufpunkt in die Eckpunkte des Quadrats herangezogen werden. Welche Beträge r_1 bis r_4 haben die Vektoren? Wie lautet $\vec{A}$ mit diesen Werten?

h) Zur Berechnung von $\vec{B}$ werden die Ableitungen von r_1 bis r_4 nach x, y und z benötigt. Wie lauten die Ableitungen?

i) Wie lautet $\vec{B}$? Wie groß ist $\vec{B}$ auf der z-Achse?

Lösung

a) Zeichnung

b)

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int\limits_{V'} \frac{\vec{j}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \mathrm{d}^3 r'$$

Strom in der $x-y$-Ebene bei $z=0$

Radius $R \Rightarrow$ Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned}
|\vec{r}-\vec{r}'|^2 &= r^2+r'^2-2rr'\cos\{\varphi-\varphi'\}+(z-z')^2\\
\mathrm{d}^3r' &= r'\cdot\mathrm{d}r'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}z'\\
\vec{j} &= I\cdot\delta\{z'\}\cdot\delta\{r'-R\}\cdot\vec{e_{\varphi'}}
\end{aligned}$$

Umrechnung von gestrichenen auf ungestrichenen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\vec{e_\mathrm{r}}\\ \vec{e_\varphi}\\ \vec{e_\mathrm{z}}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\{\varphi-\varphi'\} & \sin\{\varphi-\varphi'\} & 0\\ -\sin\{\varphi-\varphi'\} & \cos\{\varphi-\varphi'\} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{e_{\mathrm{r}'}}\\ \vec{e_{\varphi'}}\\ \vec{e_{\mathrm{z}'}}\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix}\vec{e_{\mathrm{r}'}}\\ \vec{e_{\varphi'}}\\ \vec{e_{\mathrm{z}'}}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos\{\varphi-\varphi'\} & -\sin\{\varphi-\varphi'\} & 0\\ \sin\{\varphi-\varphi'\} & \cos\{\varphi-\varphi'\} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{e_\mathrm{r}}\\ \vec{e_\varphi}\\ \vec{e_\mathrm{z}}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{j} = I\cdot\delta\{z'\}\cdot\delta\{r'-R\}\cdot\left(\sin\{\varphi-\varphi'\}\cdot\vec{e_\mathrm{r}}+\cos\{\varphi-\varphi'\}\cdot\vec{e_\varphi}\right)$$

c)

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\int\limits_{z'=-\infty}^{\infty}\int\limits_{r'=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi}\frac{\delta\{z'\}\cdot\delta\{r'-R\}\cdot\left(\sin\{\varphi-\varphi'\}\cdot\vec{e_\mathrm{r}}+\cos\{\varphi-\varphi'\}\cdot\vec{e_\varphi}\right)}{\sqrt{z^2+r'^2+r^2-2rr'\cos\{\varphi-\varphi'\}}}\cdot r'\\
&\qquad\cdot\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}z'\\
&= \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\sin\{\varphi-\varphi'\}\cdot\vec{e_\mathrm{r}}+\cos\{\varphi-\varphi'\}\cdot\vec{e_\varphi}}{\sqrt{z^2+R^2+r^2-2rR\cos\{\varphi-\varphi'\}}}\cdot\mathrm{d}\varphi'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\{x\} &= f\{x+b\}\Rightarrow\\
\int\limits_0^b f\{x\}\mathrm{d}x &= \int\limits_0^a f\{x\}\mathrm{d}x+\int\limits_a^b f\{x\}\mathrm{d}x = \int\limits_b^{a+b} f\{x\}\mathrm{d}x+\int\limits_a^b f\{x\}\mathrm{d}x = \int\limits_a^{a+b} f\{x\}\mathrm{d}x\\
&= \int\limits_0^b f\{x+a\}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{N} \left(-\sin\{\varphi'\} \cdot \vec{e_\mathrm{r}} + \cos\{\varphi'\} \cdot \vec{e_\varphi}\right) \cdot \mathrm{d}\varphi'$$

$$\text{mit} \qquad N = \sqrt{z^2 + R^2 + r^2 - 2rR\cos\{\varphi'\}} = \sqrt{a - b \cdot \cos\{\varphi'\}}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{e_\mathrm{r}} \cdot \frac{4\pi}{\mu_0 IR} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-\sin\{\varphi'\}}{\sqrt{a - b\cos\{\varphi'\}}} \cdot \mathrm{d}\varphi' = \left[-\frac{1}{b} \cdot \sqrt{a - b\cos\{\varphi'\}}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \cdot \vec{e_\varphi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\{\varphi'\}}{N} \cdot \mathrm{d}\varphi'$$

Das Vektorpotential kann bei quadratischer Stromführung (Seitenlänge a) geschlossen angegeben werden.

d) Zeichnung

e)

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}(\vec{A} \cdot \vec{e_\varphi}) = 0$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = (-\frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{A} \cdot \vec{e_\varphi}) \cdot \vec{e_\mathrm{r}} + (\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}(r \cdot \vec{A} \cdot \vec{e_\varphi})) \cdot \vec{e_\mathrm{z}} \\
\vec{B} \cdot \vec{e_\mathrm{r}} &= \frac{\mu_0 IRZ}{4\pi} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\{\varphi'\}}{N^3} \cdot \mathrm{d}\varphi' \\
\frac{\partial}{\partial r} \cdot r\vec{A} \cdot \vec{e_\varphi} &= \vec{A} \cdot \vec{e_\varphi} + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \cdot \vec{A} \cdot \vec{e_\varphi} \\
\vec{B} \cdot \vec{e_\mathrm{z}} &= \frac{\mu_0 IR}{4\pi r} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\{\varphi'\}}{N} - \frac{r(r - R \cdot \cos\{\varphi'\}) \cdot \cos\{\varphi'\}}{N^3} \cdot \mathrm{d}\varphi'
\end{aligned}$$

Probe: Feld auf z-Achse hat nur z-Komponenten:

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} N &= \sqrt{z^2+r^2} \\
\lim_{r\to 0} \vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{r}}} &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos\{\varphi'\}\mathrm{d}\varphi' = \\
\lim_{r\to 0} \vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{z}}} &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\cdot\lim_{r\to 0}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\{\varphi'\}}{N\cdot r}-\frac{r\cos\{\varphi'\}}{N^3}+\frac{R\cos^2\{\varphi'\}}{N^3}\cdot\mathrm{d}\varphi'
\end{aligned}
$$

Der erste Term divergiert für $r\to 0$ $\Rightarrow$ Entwickeln von N^{-1} in r bzw. N^{-1} in r

$$
\begin{aligned}
N^{-1} &= \left(z^2+R^2+r^2-2rR\cos\{\varphi'\}\right)^{-1/2} = (z^2+R^2)^{-1/2}\cdot(1+x)^{-1/2} \\
x &= \frac{r^2-2rR\cos\{\varphi'\}}{z^2+R^2} \\
\frac{1}{N} &= \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\cdot\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-+\cdots\right) \\
\frac{1}{rN} &= \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\cdot\frac{1}{r}-\frac{r-2R\cos\{\varphi'\}}{2(z^2+R^2)^{3/2}}+-\cdots \\
&= (z^2+R^2)^{-1/2}\cdot\frac{1}{r}+(z^2+R^2)^{-3/2}\cdot R\cos\{\varphi'\}-\frac{r}{2}(z^2+R^2)^{-3/2}+-\cdots \\
\frac{1}{N^3} &= (z^2+R^2)^{-3/2}\cdot\left(1-\frac{3}{2}x+\frac{15}{8}x^2-+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{r\to 0}\vec{B}\vec{e_{\mathrm{z}}} &= \frac{\mu_0 I R}{4\pi}\cdot\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\{\varphi'\}}{r\cdot\sqrt{z^2+R^2}}\cdot\mathrm{d}\varphi'+-\cdots+ \\
&\quad +\frac{\mu_0 I R}{4\pi}\cdot\lim_{r\to 0}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2R\cos^2\{\varphi'\}-\frac{r}{2}\cos\{\varphi'\}-r\cos\{\varphi'\}}{(z^2+R^2)^{3/2}}\cdot\mathrm{d}\varphi' \\
&= \frac{\mu_0 I R^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{(z^2+R^2)^{3/2}}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\{\varphi'\}\mathrm{d}\varphi' = \frac{\mu_0 I}{2}\cdot\frac{R^2}{(z^2+R^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

f) quadratische Stromführung:

$$
\vec{j} = I\cdot\left\{\begin{array}{lll}
(\delta\{x'-\frac{a}{2}\}-\delta\{x'+\frac{a}{2}\})\cdot\delta\{z'\}\cdot\vec{e_{\mathrm{y}}} & & -\frac{a}{2}\le y'\le\frac{a}{2} \\
(\delta\{y'+\frac{a}{2}\}-\delta\{y'-\frac{a}{2}\})\cdot\delta\{z'\}\cdot\vec{e_{\mathrm{x}}} & \text{für} & -\frac{a}{2}\le x'\le\frac{a}{2} \\
\qquad\qquad 0 & & \qquad\text{sonst}
\end{array}\right.
$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

$$\mathrm{d}^3r' = \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \vec{A} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\Bigg[\left(\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[(x-\frac{a}{2})^2+(y-y')^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[(x+\frac{a}{2})^2+(y-y')^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}y'\cdot\vec{e_\mathrm{y}} \\
&\quad + \left(\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left[(x-x')^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}} - \left[(x-x')^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x'\cdot\vec{e_\mathrm{x}}\Bigg] \\
&\quad \text{(Bronstein 192)} \qquad \xi = y-y', \qquad \mathrm{d}\xi = -\mathrm{d}y' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left[\ln\{\xi+\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2 z^2+\xi^2}\} - \ln\{\xi+\sqrt{\xi^2+(x-\frac{a}{2})^2+z^2}\}\right]_{y+\frac{a}{2}}^{y-\frac{a}{2}}\cdot\vec{e_\mathrm{y}} \\
&\quad + \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left[\ln\{\frac{\xi+\sqrt{(y-\frac{a}{2})^2+z^2+\xi^2}}{\xi+\sqrt{(y+\frac{a}{2})^2+z^2+\xi^2}}\}\right]_{x+\frac{a}{2}}^{x-\frac{a}{2}}\cdot\vec{e_\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot\vec{e_\mathrm{x}} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\ln\{\frac{(x-\frac{a}{2})+\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}{(x+\frac{a}{2})+\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2}}\cdot\frac{(x+\frac{a}{2})+\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2}}{(x-\frac{a}{2})+\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2}}\} \\
&\quad r_1 = \sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2} \quad r_2 = \sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y+\frac{a}{2})^2+z^2} \\
&\quad r_3 = \sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2} \quad r_4 = \sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+(y-\frac{a}{2})^2+z^2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\ln\{\frac{x-\frac{a}{2}+r_4}{x+\frac{a}{2}+r_3}\cdot\frac{x+\frac{a}{2}+r_1}{x-\frac{a}{2}+r_2}\} \\
\vec{q}\cdot\vec{e_\mathrm{y}} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\ln\{\frac{y-\frac{a}{2}+r_3}{y-\frac{a}{2}+r_4}\cdot\frac{y+\frac{a}{2}+r_2}{y+\frac{a}{2}+r_1}\}
\end{aligned}$$

g)

h)

i)

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{x}}} &= -\frac{\partial}{\partial z}(\vec{A}\cdot\vec{e_{\mathrm{y}}}) \\
&\qquad \frac{\partial}{\partial z}r_1 = \frac{z}{r_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}r_2 = \frac{z}{r_2}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}r_3 = \frac{z}{r_3}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}r_4 = \frac{z}{r_4} \\
&= -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left(\frac{1}{y-\frac{a}{2}+r_3}\cdot\frac{z}{r_3}+\frac{1}{y+\frac{a}{2}+r_2}\cdot\frac{z}{r_2}-\frac{1}{y-\frac{a}{2}+r_4}\cdot\frac{z}{r_4}-\frac{1}{y+\frac{a}{2}+r_1}\cdot\frac{z}{r_1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{y}}} &= \frac{\partial}{\partial z}(\vec{A}\cdot\vec{e_{\mathrm{x}}}) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left(\frac{1}{x-\frac{a}{2}+r_4}\cdot\frac{z}{r_4}+\frac{1}{x+\frac{a}{2}+r_1}\cdot\frac{z}{r_1}-\frac{1}{x+\frac{a}{2}+r_3}\cdot\frac{z}{r_3}-\frac{1}{x-\frac{a}{2}+r_2}\cdot\frac{z}{r_2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{z}}} &= \frac{\partial}{\partial x}(\vec{A}\cdot\vec{e_{\mathrm{y}}})-\frac{\partial}{\partial y}(\vec{A}\cdot\vec{e_{\mathrm{x}}}) \\
&\qquad \begin{array}{ll}
\frac{\partial}{\partial x}r_1 = \frac{x+\frac{a}{2}}{r_1} & \frac{\partial}{\partial y}r_1 = \frac{y+\frac{a}{2}}{r_1} \\
\frac{\partial}{\partial x}r_2 = \frac{x-\frac{a}{2}}{r_2} & \frac{\partial}{\partial y}r_2 = \frac{y+\frac{a}{2}}{r_2} \\
\frac{\partial}{\partial x}r_3 = \frac{x+\frac{a}{2}}{r_3} & \frac{\partial}{\partial y}r_3 = \frac{y-\frac{a}{2}}{r_3} \\
\frac{\partial}{\partial x}r_4 = \frac{x-\frac{a}{2}}{r_4} & \frac{\partial}{\partial y}r_4 = \frac{y-\frac{a}{2}}{r_4}
\end{array} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\left[\frac{x+\frac{a}{2}}{r_3}\cdot\frac{1}{y-\frac{a}{2}+r_3}+\frac{x-\frac{a}{2}}{r_2}\cdot\frac{1}{y+\frac{a}{2}+r_2}-\frac{x-\frac{a}{2}}{r_4}\cdot\frac{1}{y-\frac{a}{2}+r_4}-\frac{x+\frac{a}{2}}{r_1}\cdot\frac{1}{y+\frac{a}{2}+r_1}\right. \\
&\qquad \left.-\left(\frac{y-\frac{a}{2}}{r_4}\cdot\frac{1}{x-\frac{a}{2}+r_4}+\frac{y+\frac{a}{2}}{r_1}\cdot\frac{1}{x+\frac{a}{2}+r_1}-\frac{y-\frac{a}{2}}{r_3}\cdot\frac{1}{x+\frac{a}{2}+r_3}-\frac{y+\frac{a}{2}}{r_2}\cdot\frac{1}{x-\frac{a}{2}+r_2}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$z-\text{Achse}: \qquad r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \sqrt{\frac{a^2}{2}+z^2} = r$$

$$\vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{x}}} = 0, \qquad \vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{y}}} = 0$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}\cdot\vec{e_{\mathrm{z}}} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{z^2+\frac{1}{2}a^2}}\cdot\left(\frac{1}{r-\frac{a}{2}}-\frac{1}{r+\frac{a}{2}}+\frac{1}{r-\frac{a}{2}}-\frac{1}{r+\frac{a}{2}}\right. \\
&\qquad \left.+\frac{1}{r-\frac{a}{2}}-\frac{1}{r+\frac{a}{2}}-\frac{1}{r+\frac{a}{2}}+\frac{1}{r-\frac{a}{2}}\right) \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot\frac{4a}{2r}\cdot\left(\frac{1}{r-\frac{a}{2}}-\frac{1}{r+\frac{a}{2}}\right) = \frac{\mu_0 I a^2}{2\pi r}\cdot\frac{1}{r^2-(\frac{a}{2})^2}
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{x}}}) + \frac{\partial}{\partial y}(\vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{y}}})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(\vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{x}}}) &= \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f\{x - x'\}\mathrm{d}x' = [-f\{x - x'\}]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = f\{x + \frac{a}{2}\} - f\{x - \frac{a}{2}\} \\
\frac{\partial}{\partial y}(\vec{A} \cdot \vec{e_{\mathrm{y}}}) &= \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} g\{y - y'\}\mathrm{d}y' = g\{y + \frac{a}{2}\} - g\{y - \frac{a}{2}\}
\end{aligned}$$

$$f\{x + \frac{a}{2}\} - f\{x - \frac{a}{2}\} = g\{y - \frac{a}{2}\} - g\{y + \frac{a}{2}\}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0$$