

Lösung der Aufgabe 4.2.3

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Am magnetischen Nordpol der Erde verläuft das Magnetfeld vertikal und hat die Stärke $B (= 6.2 \cdot 10^{-5} \text{ T})$. An der Erdoberfläche und außerhalb der Erde gleicht das Magnetfeld annähernd dem Magnetfeld eines Dipols im Erdmittelpunkt.

- Wie groß ist das magnetische Dipolmoment (Erddurchmesser $d (= 14000 \text{ km})$)?
- Welche Stärke müsste ein um den Äquator fließender Strom haben, damit er ein Dipolmoment gleicher Größe erzeugt?

Lösung

a)

$$\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r - \vec{m}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Nordpol: } \vec{e}_r &= \vec{e}_z, & |\vec{r}| &= \frac{d}{2} = R \\ \vec{m} &= m_x \cdot \vec{e}_x + m_y \cdot \vec{e}_y + m_z \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi R^3} \cdot (3m_z \cdot \vec{e}_z - m_x \cdot \vec{e}_x - m_y \cdot \vec{e}_y - m_z \cdot \vec{e}_z)$$

$$\vec{B} \cdot \vec{e}_z = \frac{2m_z \mu_0}{4\pi R^3} = B \quad \Rightarrow m_z = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 1,06 \cdot 10^{23} \text{ Am}$$

$$\vec{B} \cdot \vec{e}_y = -\frac{m_y \mu_0}{4\pi R^3} = 0 \quad \Rightarrow m_y = 0$$

$$\vec{B} \cdot \vec{e}_x = 0 \quad \Rightarrow m_x = 0$$

b) Strom in der $x - y$ -Ebene, Zylinderkoordinaten \Rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{j} &= I \cdot \delta\{z'\} \cdot \delta\{r' - R\} \cdot \vec{e}_\varphi' \\ \vec{r}' &= r' \cdot \vec{e}_{r'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{1}{2} \cdot \int_{V'} \vec{r}' \times \vec{j}\{\vec{r}'\} = \frac{I}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \delta\{z'\} \cdot \delta\{r' - R\} \cdot r' \cdot (\vec{e}_{r'} \times \vec{e}_{\varphi'}) \cdot r' dr' d\varphi' dz' \\
&= \frac{IR^2}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (\vec{e}_{r'} \times \vec{e}_{\varphi'}) \cdot d\varphi' = I \cdot \pi R^2 \cdot (\vec{e}_{r'} \times \vec{e}_{\varphi'}) = I\pi R^2 \cdot \vec{e}_z \\
\Rightarrow I &= \frac{m_z}{\pi R^2} = 6,91 \cdot 10^8 \text{ A}
\end{aligned}$$

Einfacher für Ebene Stromschleife ohne Kreuzungen:

$$|\vec{m}| = I \cdot |S| \quad S = \text{vom Strom eingeschlossene Fläche}$$