Lösung der Aufgabe 4.2.6

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

In der $y-z-$ Ebene befindet sich eine Leiterschleife mit dem Radius r und Widerstand R. Ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Im Punkt $(d,0,0)^T$ ist ein magnetischer Punktdipol mit konstantem Dipolmoment $\vec{m} = (m,0,0)^T$. Gesucht ist der Strom im Kreisring, wenn der Dipol mit konstanter Geschwindigkeit v auf der $x-$ Achse in Richtung der Leiterschleife bewegt wird.

Nehmen Sie zur Lösung dieser Aufgabe an, dass die Bewegung so langsam verläuft, dass das Magnetfeld durch das Feld eines statischen Dipols angenähert werden kann. Die Bewegung beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$.

Zur Berechnung des Stroms wird die induzierte Spannung im Ring benötigt. Diese folgt aus dem elektrischen Feld im Ring, welches aus dem magnetischen Vektorpotenzial resultiert.

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt des Ringes.

b) Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{A}$? Statische elektrische Potentiale werden nicht berücksichtigt.

c) Wie lautet das magnetische Vektorpotenzial des Dipols am Ort der Leiterschleife?

d) Wie lautet die Zeitabhängigkeit des Vektors $\vec{r}'$ zum Dipol?

e) Berechnen Sie die induzierte Spannung U und den daraus im Ring fließenden Strom I.

Wird der Ring auf den ruhenden Dipol zu bewegt, fließt der gleiche Strom wie vorher. Zur Berechnung eignet sich hier die Lorentzkraft.

f) Wie lautet die Lorentzkraft auf einen Ladungsträger im Draht? Beachten Sie, dass kein äußeres elektrisches Feld herrschen soll.

g) Die auf die Ladungsträger wirkende Kraft treibt den Strom durch den Ring. Welche Größe hat die dazu gehörende äquivalente elektrische Feldstärke $\vec{E}_L$?

h) Welche Größe hat die magnetische Induktion $\vec{B}$, die die Lorentzkraft im Ring hervorruft? Was resultierte daraus für $\vec{E}_L$?

i) Berechnen Sie die induzierte Spannung im Ring und den daraus resultierenden Strom.

Lösung

Zur Berechnung des Stroms wird die induzierte Spannung im Ring benötigt. Diese folgt aus dem elektrischen Feld im Ring, welches aus dem magnetischen Vektorpotential resultiert.

a) Zeichnung

b)

$$\begin{aligned}
I &= \frac{U}{R} \\
U &= -\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\nabla} \times \vec{A}) \qquad \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \underbrace{\vec{\nabla}?????}_{\text{hier=0}} \qquad \text{da statische Lösung benutzen} \\
U &= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \oint \vec{A}\mathrm{d}\vec{l} \\
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \qquad \text{(Näherung laut Aufgabe!)}
\end{aligned}$$

c) Zylinderkoordinaten zur Berechnung von U:

$$\begin{aligned}
\vec{e_\mathrm{x}} &= \vec{e_\xi} \\
\vec{e_\mathrm{y}} &= \cos\{\varphi\} \cdot \vec{e_\mathrm{r}} - \sin\{\varphi\} \cdot \vec{e_\varphi} \\
\vec{e_\mathrm{z}} &= \sin\{\varphi\} \cdot \vec{e_\mathrm{r}} + \cos\{\varphi\} \cdot \vec{e_\varphi}
\end{aligned}$$

$$\vec{m} = m \cdot \vec{e_\xi}, \qquad \vec{r} = r \cdot \vec{e_\mathrm{r}}, \qquad \vec{r}' = r' \cdot \vec{e_\xi} = (d - vt) \cdot \vec{e_\xi}$$

$$\Rightarrow \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}') = m \cdot \vec{e_\xi} \times (r \cdot \vec{e_\mathrm{r}} - r' \cdot \vec{e_\xi}) = mr \cdot \vec{e_\varphi}$$

d)

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^3 = (r^2 + r'^2)^{3/2}$$

$$\mathrm{d}\vec{l} = r \cdot \mathrm{d}\varphi \cdot \vec{e_\varphi}$$

e)

$$\begin{aligned}
U &= \frac{\partial}{\partial t} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{mr \cdot \vec{e_\varphi}}{(r^2 + r'^2)^{3/2}} \cdot r\mathrm{d}\varphi \vec{e_\varphi} = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\mu_0 m r^2}{4\pi} (r^2 + r'^2)^{-3/2} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{\mu_0 m r^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (r^2 + r'^2)^{-3/2} = \frac{\mu_0 m r^2}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(r^2 + r'^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2r' \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} r'}_{=-v} \\
&= \frac{d - vt}{(r^2 + (d - vt)^2)^{5/2}} \frac{3}{2} \cdot \mu_0 m r^2 v
\end{aligned}$$

$$I = \frac{3\mu_0 m r^2 v}{2R} \frac{d - vt}{[r^2 + (d - vt)^2]^{\frac{5}{2}}}$$

Wird der Ring auf den ruhenden Dipol zu bewegt, fließt der gleiche Strom wie vorher. Zur Berechnung eignet sich hier die Lorentzkraft.

f)

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot \vec{E}_\mathrm{L} \qquad \text{treibt die Ladungsträger durch den Draht} \Rightarrow \text{Strom}$$

g)

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= 0 \qquad \text{(kein äußeres elektr. Feld)} \\
q \cdot \vec{E}_\mathrm{L} &= q(\vec{v} \times \vec{B}) \\
\vec{E}_\mathrm{L} &= (\vec{v} \times \vec{B}) \qquad \Rightarrow \qquad U = -\oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} \\
\vec{v} &= v \cdot \vec{e_\mathrm{x}} = v \cdot \vec{e_\xi}
\end{aligned}$$

h)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\,(\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r'}))\,\cdot (\vec{r} - \vec{r'}) - \vec{m} \cdot |\vec{r} - \vec{r'}|^2}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5}$$

$$\begin{aligned}
\vec{r'} &= d \cdot \vec{e_\mathrm{x}} = d \cdot \vec{e_\xi} \\
\vec{r} &= r \cdot \vec{e_\mathrm{r}} + vt \cdot \vec{e_\xi} \\
\vec{r} - \vec{r'} &= r \cdot \vec{e_\mathrm{r}} + (vt - d) \cdot \vec{e_\xi} \\
\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r'}) &= m \cdot (vt - d)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{B} &= \frac{\mu_0 v}{4\pi} \cdot \frac{3m(vt-d) \cdot \vec{e_\xi} \times (r \cdot \vec{e_\mathrm{r}} + (vt-d) \cdot \vec{e_\xi}) - m\,\overbrace{(\vec{e_\xi} \times \vec{e_\xi})}^{=0} \cdot |\vec{r} - \vec{r'}|^2}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} \\
&= \frac{\mu_0 v}{4\pi} \cdot \frac{3mr(vt-d) \cdot \vec{e_\varphi}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5}
\end{aligned}
$$

i)

$$
\begin{aligned}
U &= -\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mu_0 v}{4\pi} \cdot \frac{3mr(vt-d) \cdot \vec{e_\varphi}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} \cdot r\mathrm{d}\varphi \vec{e_\varphi} = \frac{-3\mu_0 m r^2 v}{2} \cdot \frac{vt-d}{|\vec{r} - \vec{r'}|^5} \\
I &= \frac{3\mu_0 m r^2 v}{2R} \cdot \frac{d-vt}{\left[r^2 + (d-vt)^2\right]^{5/2}}
\end{aligned}
$$