# Lösung der Aufgabe 5.1.1

*Überarbeitet: MaKi*

## Aufgabe

Ein in y-Richtung unendlich langer, geerdeter Hohlleiter mit rechteckförmigem Querschnitt schließt wie unten dargestellt das Volumen

$$
\begin{aligned}
0 &\leq x \leq a \\
-\infty &\leq y \leq \infty \\
-b &\leq z \leq b
\end{aligned}
$$

ein. Im Bereich $-b \leq z < 0$ hat das eingeschlossene Medium die Dielektrizitätszahl $\epsilon_0\epsilon_2$, im Bereich $0 < z \leq b$ gilt $\epsilon_0\epsilon_1$. In der Trennfläche $z = 0$, $0 < x < a$ befindet sich eine in der y-Richtung unendlich ausgedehnte und unendlich dünne Folie mit der konstanten Flächenladungsdichte $\varrho_S$.

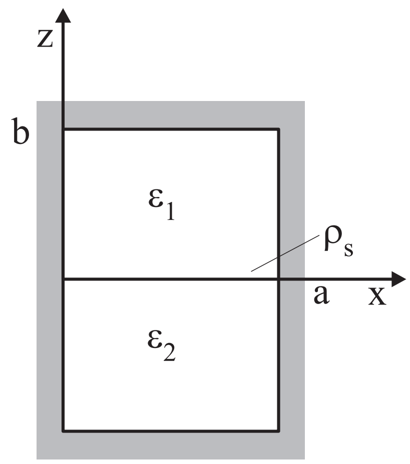


Abbildung 1: Rechteckhohlleiter mit Flächenladung $\varrho_S$ in der Ebene $z = 0$

a) Wie wirkt sich die unendliche Ausdehnung in $y$-Richtung aus?

b) Wie lautet der Ansatz für das Potential $V_1$ im Bereich 1 ($z \geq 0$)? Verwenden Sie einen Ansatz, der möglichst viele Randbedingungen bereits erfüllt.

c) Wie lautet der entsprechende Ansatz für das Potential $V_2$ im Bereich 2 ($z \leq 0$)?

d) Wie lauten die Randbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ bei $z = 0$?

e) Wie lautet das Potential im gesamten Hohlleiter?

f) Welche Größe hat die Oberflächenladung auf der Wandfläche bei $z = b$ ?

## Lösung

a) Durch die unendliche Ausdehnung in y-Richtung gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow \quad & V\{x,y,z\} = V\{x,z\} \end{aligned}$$

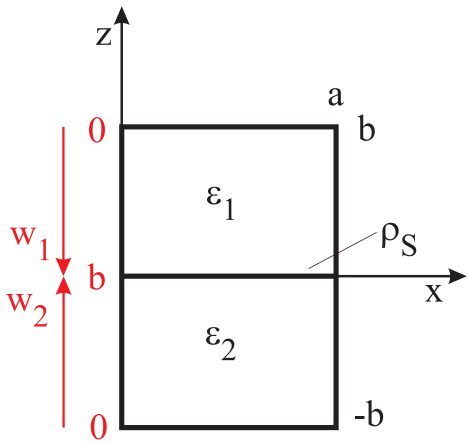


Abbildung 2: Rechteckhohlleiter mit Flächenladung $\varrho_S$ in der Ebene $z = 0$

b) Wir führen zwei neue Achsen mit $0 < w_{1,2} < b$ in den Bereichen $b > z > 0$ und $-b < z < 0$ gemäß Abbildung 2 ein und verwenden den Produktansatz

$$V_1\{x, w_1\} = X_1\{x\} \cdot W_1\{w_1\}$$

für das Potential $V_1$ im Bereich $w_1 : \ z > 0$.

$$\begin{aligned} \triangle V_1 = \frac{\partial^2 V\{x,w_1\}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V\{x,w_1\}}{\partial w_1^2} &= W_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + X_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial w_1^2} = 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{X_1}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}}_{k_x^2} + \underbrace{\frac{1}{W_1}\frac{\partial^2 W_1}{\partial w_1^2}}_{-k_x^2} &= 0 \quad \text{(Separationsbedingung)} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser sep. Differentialgleichung lautet:

$$\begin{aligned} X_1 &= A_x \cos\{k_x x\} + B_x \sin\{k_x x\} \\ W_1 &= A_w \cosh\{k_x w_1\} + B_w \sinh\{k_x w_1\} \end{aligned}$$

Mit der Randbedingung: $V_1\{x, w_1\}\Big|_{x=0} = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad X_1\{x\}\Big|_{x=0} \cdot W_1\{w_1\} = 0 \\ \text{mit } W_1\{w_1\} \neq 0 \; &\Rightarrow \quad X_1\{x\}\Big|_{x=0} = 0 \text{ (sonst trivial)} \\ &\Rightarrow \quad A_x = 0 \\ &\Rightarrow \quad X_1 = B_x \sin\{k_x x\} \end{aligned}$$

analog folgt aus der Randbedingung: $V_1\{x, w_1\}\Big|_{x=a} = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad X_1\{x\}\Big|_{x=a} = 0 \\ &\Rightarrow \quad X_1 = B_{x,m} \cdot \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\} \; ; m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

In der anderen Richtung gilt die Randbedingung: $V_1\{x, w_1\}\Big|_{w_1=0} = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad W_1\{w_1\}\Big|_{w_1=0} = 0 \\ &\Rightarrow \quad W_1 = B_w \cdot \sinh\{k_x w_1\} \end{aligned}$$

Aus der Separationsbedingung und den Randbedingungen in $x$ folgt:

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \; ; m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

$$B_w \rightarrow B_{w,m} \tag{2}$$

Einsetzen in den Produktansatz liefert:

$$V_1 = X_1\{x\}W_1\{w_1\} = B_{x,m} \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\} \cdot B_{w,m} \sinh\left\{\frac{m\pi w_1}{a}\right\}$$

Wir können verkürzt schreiben:

$$B_{1,m} = B_{x,m} \cdot B_{w,m} \cdot \sinh\left\{\frac{m\pi b}{a}\right\} \tag{3}$$

Die Summe über alle diese Lösungen ist ebenfalls eine Lösung:

$$V_1 = \sum_{m=1}^{\infty} B_{1,m} \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\} \frac{\sinh\left\{\frac{m\pi w_1}{a}\right\}}{\sinh\left\{\frac{m\pi b}{a}\right\}}$$

Dabei haben wir, wie im Skript, durch Division durch die Konstante $\sinh\left\{\frac{m\pi b}{a}\right\}$ bereits dafür gesorgt, dass die Koeffizienten auf der Grenzfläche $w_1 = b$ bzw. $z = 0$ möglichst einfach werden.

c) Mit dem Produktansatz $V_2\{x, w_2\} = X_2\{x\} \cdot W_2\{w_2\}$ lässt sich analog die Lösung im Bereich $w_2 :\; z < 0$ ermitteln:

$$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2,n} \sin\left\{\frac{n\pi x}{a}\right\} \frac{\sinh\left\{\frac{n\pi w_2}{a}\right\}}{\sinh\left\{\frac{n\pi b}{a}\right\}}$$

d) Für $z = 0$ bzw. $w_{1,2} = b$ muss die Stetigkeitsbedingung $(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \times \vec{n} = 0$ mit $\vec{n} = \vec{e}_z$ erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \\ \vec{E} \times \vec{n} &= \frac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_y \\ \Rightarrow \text{für } z = 0 : \quad \left.\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{w_1=b} - \left.\frac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{w_2=b} &\overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{w_1=b} = \displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} B_{1,m}\frac{m\pi}{a}\cos\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\} \\ \left.\dfrac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{w_2=b} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B_{2,n}\frac{n\pi}{a}\cos\left\{\frac{n\pi x}{a}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m=n, \\ B_{1,m}=B_{2,n} \end{array}$$

Als weitere Stetigkeitsbedingung muss $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\circ\vec{n} = \varrho_s$ für $z=0$ gelten:

$$\begin{aligned}
\vec{D}\circ\vec{n} &= -\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial V\{z\}}{\partial z} = -\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial V\{w_{1,2}\}}{\partial w_{1,2}}\cdot\frac{\partial w_{1,2}}{\partial z} \\
& \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = -1 \\
& \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = 1 \\
\Rightarrow\ \varrho_s &= \varepsilon_0\left[\varepsilon_1\left.\frac{\partial V_1}{\partial w_1}\right|_{w_1=b} + \varepsilon_2\left.\frac{\partial V_2}{\partial w_2}\right|_{w_2=b}\right] \\
&= \varepsilon_0\sum_{m=1}^{\infty} B_{1,m}\sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\coth\left\{\frac{m\pi b}{a}\right\}\frac{m\pi}{a}(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \\
\int_0^a \varrho_s\sin\left\{\frac{n\pi x}{a}\right\}\mathrm{d}x &= \varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\pi}{a}B_{1,m}\coth\left\{\frac{m\pi b}{a}\right\}\underbrace{\int_0^a \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n\pi x}{a}\right\}\mathrm{d}x}_{=\frac{a}{2}\delta_{m,n}} \\
\varrho_s\cdot\frac{a}{m\pi}\left[1-\cos\{m\pi\}\right] &= B_{1,m}\frac{m\pi}{2}\cdot\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\coth\left\{\frac{m\pi b}{a}\right\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2\varrho_s a}{m\pi} & \text{für } \frac{m+1}{2}\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
B_{1,m} = B_{2,m} &= \begin{cases} \dfrac{4\varrho_s a}{m^2\pi^2\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\coth\left\{\frac{m\pi b}{a}\right\}} & \text{für } m=(2n+1) \text{ mit } n\in\mathbb{N}_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

e) Potential im gesamten Hohlleiter

$$V_{1,2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\varrho_s a}{(2n+1)^2\pi^2\varepsilon_0(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\sin\left\{(2n+1)\pi\frac{x}{a}\right\}\frac{\sinh\left\{(2n+1)\pi\dfrac{(b\mp z)}{a}\right\}}{\cosh\left\{(2n+1)\pi\dfrac{b}{a}\right\}}$$

f) Oberflächenladung bei $z = b$

$$\begin{aligned}
\varrho_s\Big|_{z=b} &= -\vec{D}_1\vec{e}_z\Big|_{z=b} \\
&= \varepsilon_0\varepsilon_1\frac{\partial V_1}{\partial z}\Big|_{z=b} \\
&= -\frac{4\varrho_s}{\pi}\frac{\varepsilon_1}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left\{\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right\}}{(2n+1)\cosh\left\{\frac{(2n+1)\pi b}{a}\right\}}
\end{aligned}$$