Lösung der Aufgabe 5.1.2

Überarbeitet: MaKi

Aufgabe

Auf der Oberfläche des durch

$$\begin{aligned} 0 \leq R \leq a & \qquad \text{und} \\ -l \leq \ z \ \leq l & \end{aligned}$$

definierten kreiszylindrischen Volumens sei die folgende Potenzialverteilung vorgegeben:

$$\begin{aligned} &V = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm l \quad \text{und} \quad 0 \leq R \leq a \\ &V = V_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \quad \text{für} \quad -l \leq z \leq l \quad \text{und} \quad R = a \quad . \end{aligned}$$

Zur Berechnung des elektrostatischen Potentials innerhalb des oben definierten Volumens geht man von der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten aus! Dabei ist es praktisch, Funktionen mit komplexen Argumenten zu zuzulassen.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet der allgemeine Ansatz für das Potential im Zylinder?

c) Berechnen Sie die Koeffizienten im Potenzialansatz mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen. Beginnen Sie mit der Umfangskomponente.

d) Wie lautet das Potential im gesamten Zylinder?

Lösung

a) Skizze siehe Abbildung 1.

b)

$$\triangle V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} V\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} V\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V = 0$$

Allgemeinster Produktansatz:

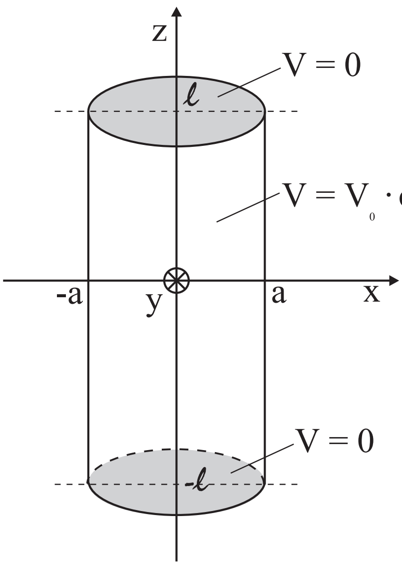

Abbildung 1: Zylinder mit geerdeten Deckeln und vorgegebenem Potential V auf dem Mantel.

$$V(\rho,\phi,z) = R\{\rho\}\Phi\{\phi\}Z\{z\}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (A_\rho J_m\{k_z\rho\} + B_\rho N_m\{k_z\rho\})(A_\phi \cos\{m\phi\} + B_\phi \sin\{m\phi\})(A_z \cosh\{k_z z\} + B_z \sinh\{k_z z\})\,\mathrm{d}z$$

Lt. Skript kann man für vorliegenden Fall weiter vereinfachen:

$$V(\rho,\phi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \left(A_\rho \frac{J_m\{i\pi n \frac{\rho}{z_0}\}}{J_m\{i\pi n \frac{a}{z_0}\}} \right) (A_\phi \cos\{m\phi\} + B_\phi \sin\{m\phi\})(B_z \sin\{\pi n \frac{z-z'}{z_0}\})$$

Dabei haben wir eingeführt:

$$z_0 = 2\cdot l$$
$$z' = -l$$

Weiterhin haben wir benutzt, dass das Potential auf der Achse nicht divergieren darf, und somit die Neumann Fkt. hier nicht auftreten können. Zusätzlich ist die Diskretisierung von k_z durch die Randbedingungen auf Deckel und Boden berücksichtigt.

Zur weiteren Vereinfachung führen wir die neue Koordinate

$$w = z - z' = z + l$$

ein:

$$V(\rho,\phi,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(A_\rho \frac{J_m\{i\pi n\frac{\rho}{2l}\}}{J_m\{i\pi n\frac{a}{2l}\}}\right)(A_\phi\cos\{m\phi\} + B_\phi\sin\{m\phi\})(B_z\sin\{\pi n\frac{w}{2l}\})$$

c) Auf dem Mantel soll lt. Aufgabe gelten:

$$\begin{aligned}
V(a,\phi,z) &= V_0\cdot\cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_\rho\cdot(A_\phi\cos\{m\phi\} + B_\phi\sin\{m\phi\})\cdot B_z\sin\{\pi n\frac{w}{2l}\}\\
\Rightarrow\quad & \int_0^{2\pi} V_0\cdot\cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\}\sin\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi = V_0\cdot\cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\}\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi}_{=0} = 0\\
&= \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_\rho(A_\phi\cos\{m\phi\} + B_\phi\sin\{m\phi\})B_z\sin\{\pi n\frac{w}{2l}\}\cdot\sin\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_\rho B_z\sin\{\pi n\frac{w}{2l}\}(A_\phi\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos\{m\phi\}\sin\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi}_{=0} + B_\phi\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin\{m\phi\}\sin\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi)}_{=\pi\delta_{m,m'}}\\
\Rightarrow\quad & B_\phi = 0
\end{aligned}$$

andererseits:

$$\int_0^{2\pi} V_0 \cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\} \cos\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi = V_0 \cdot \cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi}_{=2\pi\delta_{m',0}} \quad (\Rightarrow m = 0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_\rho B_z \sin\{\pi n \frac{w}{2l}\}(A_\phi \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\{m\phi\}\cos\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi}_{=\delta_{m,m'}\frac{2\pi}{2-\delta_{m',0}}} + B_\phi \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\{m\phi\}\cos\{m'\phi\}\,\mathrm{d}\phi)}_{=0}$$

$$\Rightarrow V_0 \cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{A_\rho B_z A_\phi}_{C_{0,n}} \sin\{\pi n \frac{z+l}{2l}\}$$

$$\Rightarrow V\{\rho,\phi,w\} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{0,n} \frac{J_0\left\{in\pi\frac{\rho}{2l}\right\}}{J_0\left\{in\pi\frac{a}{2l}\right\}} \sin\left\{n\pi\frac{w}{2l}\right\}$$

Entwicklung von $V\{a,\phi,z\}$ nach z

$$\int_{-l}^{l} V_0 \cos\left\{\frac{\pi}{2l}z\right\}\cos\left\{\frac{n'\pi}{2l}z\right\}\mathrm{d}z = \int_{-l}^{l} \sum_{n=0}^{\infty} C_{0,n} \sin\left\{\frac{n\pi}{2l}(z+l)\right\} \cdot \cos\left\{\frac{n'\pi}{2l}z\right\}\mathrm{d}z$$

$$\left.\begin{matrix} l & \text{für } n'=1 \\ 0 & \text{sonst}\end{matrix}\right\} \cdot V_0 = \sum_{n=0}^{\infty} C_{0,n} \int_{-l}^{l} \left(\sin\left\{\frac{n\pi}{2l}z\right\}\cos\left\{\frac{n\pi}{2l}l\right\} + \cos\left\{\frac{n\pi}{2l}z\right\}\sin\left\{\frac{n\pi}{2l}l\right\}\right)\cos\left\{\frac{n}{2}\right.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_{0,n} \sin\left\{\frac{n\pi}{2}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} l & \text{für } n=n' \\ 0 & \text{sonst}\end{matrix}\right.$$

$$\Rightarrow\ n = 1$$

$$C_{0,1} = V_0$$

$$\Rightarrow V\{\rho,\phi,z\} = V_0 \cdot \frac{J_0\left\{i\frac{\pi}{2l}\rho\right\}}{J_0\left\{i\frac{\pi}{2l}a\right\}} \cdot \sin\left\{\frac{\pi}{2l}(z+l)\right\}$$

$$\text{mit:}\ \ \sin\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi z}{2l}\right\} = \sin\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\cdot\cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\} + \cos\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\cdot\sin\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\} = \cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\}$$

$$\Rightarrow V\{\rho,\phi,z\} = V_0 \cdot \frac{J_0\left\{i\frac{\pi}{2l}\rho\right\}}{J_0\left\{i\frac{\pi}{2l}a\right\}} \cdot \cos\left\{\frac{\pi z}{2l}\right\}$$