Lösung der Aufgabe 5.1.3

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Auf der Oberfläche des durch

$$\begin{aligned} 0 \leq R \leq a \qquad & \text{und} \\ -l \leq \; z \; \leq l \end{aligned}$$

definierten kreiszylindrischen Volumens sei die folgende Potenzialverteilung vorgegeben:

$$\begin{aligned} V = 0 \quad & \text{für} \quad z = \pm l \quad \text{und} \quad 0 \leq R \leq a \\ V = V_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \quad & \text{für} \quad -l \leq z \leq l \quad \text{und} \quad R = a \quad . \end{aligned}$$

Zur Berechnung des elektrostatischen Potentials innerhalb des oben definierten Volumens geht man von der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten aus! Dabei ist es praktisch, Funktionen mit komplexen Argumenten zu zuzulassen.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet der allgemeine Ansatz für das Potential im Zylinder?

c) Berechnen Sie die Koeffizienten im Potenzialansatz mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen. Beginnen Sie mit der Umfangskomponente.

d) Wie lautet das Potential im gesamten Zylinder?

Lösung

$$\Delta = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}V\right) + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = 0$$

$$\text{Produktansatz: } V(\varrho,\Phi,z) = R\{\varrho\}\Phi\{\phi\}Z\{z\}$$

$$\Rightarrow V\{\varrho,\phi,z\} = \sum_m \sum_{k_z} \quad (A_1 \cos\{ik_z z\} + A_2 \sin\{ik_z z\})$$
$$(B_1 \cos\{m\phi\} + B_2 \sin\{m\phi\})$$
$$(C_1 J_m\{k_z \varrho\} + C_2 N_m\{k_z \varrho\})$$

c) Potential auf der Achse divergiert nicht: $\Rightarrow$ Neumann Fkt. tritt nicht auf .

$$z' = z - l$$

$$\begin{aligned} V\{z' = l\} = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_1 = 0 \\ V\{z' = -l\} \quad &\Rightarrow \quad ik_z(-2l) = n\pi \\ & \qquad k_z = \frac{in\pi}{2l} \qquad (n \,\epsilon\, Z) \end{aligned}$$

$$V\{\varrho,\phi,z\} = \sum_m \sum_n \qquad J_m\{i\tfrac{n\pi}{2l}\varrho\} \cdot \sin\{\tfrac{n\pi}{2l}(l-z)\}$$
$$(C_{m,n} \cos\{m\phi\} + D_{m,n} \sin\{m\phi\})$$

Potential auf Mantel ist unabhängig von ϕ $\qquad \Rightarrow \; m = 0$

$$\Rightarrow \; C_{m,n} \cos\{m\phi\} + D_{m,n} \sin\{m\phi\} = C_{0,n}$$

$$\begin{aligned} V\{\varrho,\phi,z\} &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n} J_0\left(i\frac{n\pi}{2l}\varrho\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2l}(l-z)\right) \\ V\{\varrho,\phi,z\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{C_{0,n} J_0\left(i\frac{n\pi}{2l}a\right)}_{=C'_{0,n}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2l}(l-z)\right) = V_0 \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \end{aligned}$$

Entwicklung nach z

$$\begin{aligned}
\text{links} &= -\int_0^{2l} \sin\left(\frac{n\pi}{2l}(z-l)\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2l}z\right) dz \\
&= -\int_0^{2l} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{2l}z\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2l}l\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2l}z\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2l}l\right)\right] \cdot \cos\left(\frac{n'\pi}{2l}z\right) dz \\
&= \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \begin{cases} \frac{2l}{2} & \text{für } n = n' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\text{rechts} &= \int_0^{2l} \cos\left(\frac{\pi}{2l}z\right) \cdot \cos\left(\frac{n'\pi}{2l}z\right) dz = \begin{cases} \frac{2l}{2} & \text{für } n' = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
& C'_{0,1} = V_0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow V\{\varrho, \phi, z\} = V_0 \cdot \frac{J_0\left(i\frac{\pi}{2l}\varrho\right)}{J_0\left(i\frac{\pi}{2l}a\right)} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2l}(l-z)\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2l}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right) = \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right)$$

$$\Rightarrow V\{\varrho, \phi, z\} = V_0 \cdot \frac{J_0\left(i\frac{\pi}{2l}\varrho\right)}{J_0\left(i\frac{\pi}{2l}a\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right)$$