Lösung der Aufgabe 5.1.10

Überarbeitet: MaKi

Aufgabe

Im folgenden wird ein ladungsfreier Viertelzylinder betrachtet, d.h. ein Zylinder, dessen Grundfläche aus nur einem Viertelkreis besteht. Seine Achse fällt mit der z-Achse zusammen und die Stirnseiten liegen im ersten Quadranten des x-y-Koordinatensystems. Der Viertelzylinder dehnt sich in positive z-Richtung aus. Er hat den Radius a und die Länge l.
Auf der Stirnseite bei $z = 0$ hat der Zylinder das Potential $V_C = C \cdot x \cdot y$, die anderen Seiten sind geerdet.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet das Potential V_C unter Verwendung von Zylinderparametern?

c) Wie lautet der vollständige Lösungsansatz für V in einem Vollzylinder?

d) Wählen Sie eine geeignete Untermenge der von φ-abhängigen Funktionen, die die Randbedingungen bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ erfüllen.

e) Bildet diese Untermenge ein vollständiges Orthogonalsystem im Bereich $0 < \varphi < \pi/2$?

f) Durch geeignete Translation verschwindet eine der beiden Funktionen von z. Wie lautet die Transformation und welche Funktion verschwindet?

g) Wie lautet der vollständige Lösungsansatz für V in dem Viertelzylinder?

h) Entwickeln Sie die Koeffizienten nach φ.

i) Entwickeln Sie die Koeffizienten nach ϱ.

k) Wie lautet die vollständige Lösung?

Formeln zur Besselfunktion:

$$\int x^{n+1}\,\mathrm{J}_n(x)\,dx = x^{n+1}\,\mathrm{J}_{n+1}(x)$$
$$\int x^{-n+1}\,\mathrm{J}_n(x)\,dx = x^{-n+1}\,\mathrm{J}_{n-1}(x)$$

Lösung

a)…

b)

$$V_C(\rho,\varphi,0) = V_0 \cdot \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \rho < a, \quad 0 < \varphi < \pi/2 \\ -1 & \text{für} \quad \rho < a, \quad \pi/2 < \varphi < \pi \\ 1 & \text{für} \quad \rho < a, \quad \pi < \varphi < 3\pi/2 \\ -1 & \text{für} \quad \rho < a, \quad 3\pi/2 < \varphi < 2\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Falsch: Das Potential in den anderen drei Quadranten zu Null annehmen; Das Potential an den Kanten ist dann nämlich $V_0/2$. (Entwickelt man eine Kurve in eine Fourierreihe, erhält man an Unstetigkeitspunkten den Mittelwert aus den angrenzenden Bereichen (Satz von Dirichlet).)

c)

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} V\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} V\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V = 0$$

d)

$$V = \sum_{k_z}\sum_m \left[A_{1,k_z}\frac{\cosh\{k_z z\}}{\cosh\{k_z l\}} + A_{2,k_z}\frac{\sinh\{k_z z\}}{\sinh\{k_z l\}}\right]\left[B_{1,m}\cos\{m\varphi\} + B_{2,m}\sin\{m\varphi\}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[C_{1,m,k_z}\,\mathrm{J}_m\{k_z\rho\} + C_{2,m,k_z}\,\mathrm{N}_m\{k_z\rho\}\right]$$

e) Da V bei $\rho = 0$ endlich ist, verschwinden alle C_{2,m,k_z}.

f) Wegen $V(\rho = a) = 0$ ist $k_z = x_{m,n}/a$, wobei $x_{m,n}$ die n-te Nullstelle der Besselfunktion m-ter Ordnung ist.

g) Die Stirnseite bei $z = l$ ist geerdet. Verschiebt man die Anordnung so, dass diese Stirnseite bei $z' = 0$ liegt, verschwinden die Koeffizienten A'_1.
Die Translationsregel lautet also: $z' = z - l$
Achtung: Zylinder geht nun bis $z' = -l$

h) Das Potential verschwindet für $\varphi = 0$, deshalb verschwinden alle $B_1 = 0$.
Das Potential verschwindet auch für $\varphi = \pi/2$, deshalb gilt: $B_{2,m} = 0 \quad \forall \quad (m+1)/2 \in \mathbb{N}$

i) Mit $V_{m,n} = A_{2,k_z}B_{2,m}C_{1,m,k_z}$:

$$V = \sum_n\sum_m V_{m,n}\frac{\sinh\{x_{m,n}(l-z)/a\}}{\sinh\{x_{m,n}l/a\}}\sin\{m\varphi\}\,\mathrm{J}_m\{x_{m,n}\rho/a\}$$

$$\sum_n\sum_m V_{m,n}\sin\{m\varphi\}\,\mathrm{J}_m\{x_{m,n}\rho/a\} = V_C$$

k) Nur gerade m können auftreten (s.o.):

$$\int_0^{2\pi} \sum_n \sum_m V_{m,n} \sin\{m\varphi\}\, \mathrm{J}_m\{x_{m,n}\rho/a\} \sin\{m'\varphi\}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} V_C \sin\{m'\varphi\}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_0 \sin\{m'\varphi\}\, d\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} V_0 \sin\{m'\varphi\}\, d\varphi + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} V_0 \sin\{m'\varphi\}\, d\varphi - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} V_0 \sin\{m'\varphi$$

$$\sum_n \sum_m V_{m,n}\, \mathrm{J}_m\{x_{m,n}\rho/a\} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin\{m\varphi\} \sin\{m'\varphi\}\, d\varphi}_{\pi\delta_{m,m'}} = -\frac{4}{m'} \Big[\cos\{m'\varphi\} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sum_n V_{m',n}\, \mathrm{J}_{m'}\{x_{m',n}\rho/a\} = \frac{4}{\pi m'} \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m' = 2, 6, 10, \ldots \\ 0 & \text{für} \quad m' = 0, 4, 8, \ldots \\ 0 & \text{für} \quad m' = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots \end{cases}$$

Da nur noch der Index m' auftritt, kann er wieder durch m ersetzt werden.

l) Im folgenden wird die Normierung $\rho' = \rho/a$ verwendet.
Nur die Koeffizienten mit $(m+2)/4 \in \mathbb{N}$ sind von Null verschieden.

$$\int_0^1 \rho' \sum_n V_{m,n}\, \mathrm{J}_m\{x_{m,n}\rho'\}\, \mathrm{J}_m\{x_{m,n'}\rho'\}\, d\rho' = \int_0^1 \rho' \frac{4}{\pi m} J_m\{x_{m,n'}\rho'\}\, d\rho'$$

$$\sum_n V_{m,n} \underbrace{\int_0^1 \rho'\, \mathrm{J}_m\{x_{m,n}\rho'\}\, \mathrm{J}_m\{x_{m,n'}\rho'\}\, d\rho'}_{\frac{1}{2}\mathrm{J}^2_{m+1\{x_{m,n}\rho'\}}\,\delta_{n,n'}} = V_{m,n'} \frac{1}{2} \mathrm{J}^2_{m+1\{x_{m,n'}\rho'\}} = \int_0^1 \rho' \frac{4}{\pi m} J_m\{x_{m,n'}\rho'\}\, d\rho'$$

$$V_{m,n} = \frac{8}{\pi m\, \mathrm{J}^2_{m+1\{x_{m,n'}\rho'\}}} \int_0^1 \rho' J_m\{x_{m,n}\rho'\}\, d\rho' \begin{cases} 1 & \text{für} \quad m = 2, 6, 10, \ldots \\ 0 & \text{für} \quad m = 0, 4, 8, \ldots \\ 0 & \text{für} \quad m = 1, 3, 5, 7, 9, \ldots \end{cases}$$