Lösung der Aufgabe 5.2.2

Überarbeitet: JüM 9.6.2002

Aufgabe

Das Potenzial eines elektrischen Dipols $\vec{p}_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$ mit der Ausdehnung $|\vec{d}|$, der sich am Punkt $\vec{r}_{\mathrm{a}}$ im Abstand $a \ll \|\vec{d}\|$ vor einer ebenen, geerdeten Metalloberfläche befindet, soll bestimmt werden. Die Metallfläche befindet sich bei $z = 0$, der Dipol ist im positiven Halbraum $z > 0$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass sich eine möglichst einfache Darstellung für $\vec{r}_{\mathrm{a}}$ ergibt.

a) Wie lauten das Potenzial V_{a} und das elektrische Feld $\vec{E}_{\mathrm{a}}$ des Dipols ohne die Metallplatte im positiven Halbraum? Geben Sie eine Näherung für $|\vec{r}_{\mathrm{a}} - \vec{r}| \gg |\vec{d}|$ an (Punktdipol).

b) Konstruieren Sie zu dem gegebenen Dipol $\vec{p}_{\mathrm{a}}$ den Bilddipol $\vec{p}_{\mathrm{b}}$. Geben Sie den Ort $\vec{r}_{\mathrm{b}}$ des Bilddipols in vektorieller Schreibweise an.

c) Wie lautet die vektorielle Darstellung für den Bilddipol $\vec{p}_{\mathrm{b}}$?

d) Bestimmen Sie das Gesamtpotenzial $V\{\vec{r}\}$ im positiven Halbraum mit der Näherung aus a).

e) Wie groß ist das elektrische Feld $\vec{E}$ im positiven Halbraum?

f) Geben Sie die Oberflächenladungsdichte $\varrho_{\mathrm{s}}\{\vec{r}\}$ an, die als Folge des Dipols $\vec{p}_{\mathrm{a}}$ auf der Metalloberfläche influenziert wird.

Lösung

a) Exakt:

$$V_{\mathrm{a}}\{\vec{r}, \vec{r}_{\mathrm{a}}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left|\vec{r} - \left(\vec{r}_{\mathrm{a}} + \frac{\vec{d}}{2}\right)\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r} - \left(\vec{r}_{\mathrm{a}} - \frac{\vec{d}}{2}\right)\right|}\right)$$

Näherung

$$V\{\vec{r}, \vec{r}_{\mathrm{a}}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d} \circ (\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{a}})}{|\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{a}}|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p} \circ (\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{a}})}{|\vec{r} - \vec{r}_{\mathrm{a}}|^3} \quad .$$

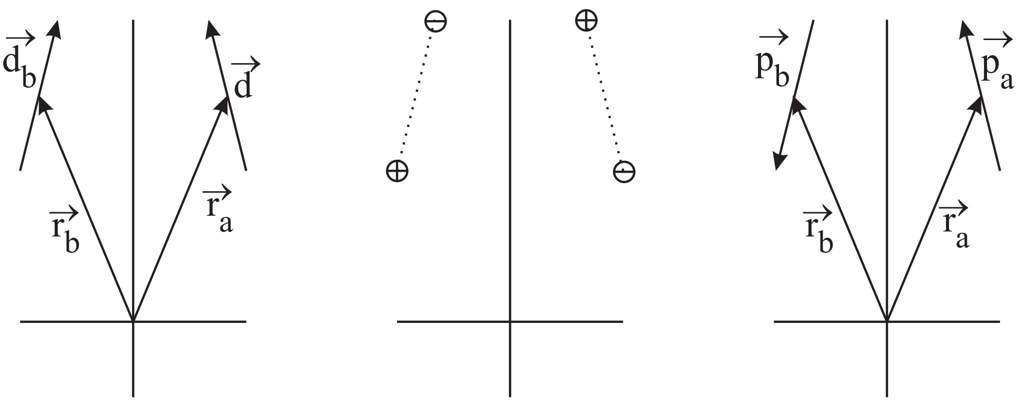

Abbildung 1: Spiegelung eines Originaldipols an einer Metallfläche

b) Für die Spiegelbilder werden die Normalkomponenten der Vektoren negiert. Gleichzeitig werden die Ladungen negiert.

Jeder Vektor kann nach Normal- und Tangentialkomponente an eine Grenzfläche mit $\vec{r} = (\vec{n} \circ \vec{r})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{r}) \times \vec{n}$ geschrieben werden. Es resultiert also

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\mathrm{a} &= (\vec{n} \circ \vec{r}_\mathrm{a})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{r}_\mathrm{a}) \times \vec{n} \\
\vec{r}_\mathrm{b} &= (\vec{n} \circ \vec{r}_\mathrm{b})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{r}_\mathrm{b}) \times \vec{n} = -(\vec{n} \circ \vec{r}_\mathrm{a})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{r}_\mathrm{a}) \times \vec{n}
\end{aligned}$$

Nach Aufgabenstellung soll eine möglichst einfache Darstellung für $\vec{r}_\mathrm{a}$ gefunden werden. Da sich der Dipol im Abstand a von der Grenzfläche befindet, wäre die einfachste Darstellung $\vec{r}_\mathrm{a} = a\vec{e}_\mathrm{z}$ mit $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{z}$. Somit ergibt sich $\vec{r}_\mathrm{b} = -a\vec{e}_\mathrm{z}$

c) Für die Dipollänge $\vec{d}$ gilt das gleiche wie für den Ortsvektor:

$$\vec{d}_\mathrm{b} = (\vec{n} \circ \vec{d}_\mathrm{b})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{d}_\mathrm{b}) \times \vec{n} = -(\vec{n} \circ \vec{d})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{d}) \times \vec{n}$$

Die Ladungen werden negiert $Q_\mathrm{b} = -Q$. Es resultiert also für den Spiegeldipol

$$\begin{aligned}
\vec{p}_\mathrm{b} &= Q_\mathrm{b}\vec{d}_\mathrm{b} \\
&= Q_\mathrm{b}\left((\vec{n} \circ \vec{d}_\mathrm{b})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{d}_\mathrm{b}) \times \vec{n}\right) = Q\left((\vec{n} \circ \vec{d})\vec{n} - (\vec{n} \times \vec{d}) \times \vec{n}\right) = (\vec{n} \circ \vec{p})\vec{n} - (\vec{n} \times \vec{p}) \times \vec{n} \\
&= -p_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + p_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}
\end{aligned}$$

d) Das Gesamtpotenzial setzt sich aus den beiden Teilpotenzialen der Dipole zusammen: $V_{\mathrm{ges}} = V_{\mathrm{a}} + V_{\mathrm{b}}$, wobei mit obigen Feststellungen zu schreiben ist

$$V_{\mathrm{a}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}) \circ (\vec{r} - a\vec{e}_{\mathrm{z}})}{|\vec{r} - a\vec{e}_{\mathrm{z}}|^3}$$

$$V_{\mathrm{b}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}) \circ (\vec{r} + a\vec{e}_{\mathrm{z}})}{|\vec{r} + a\vec{e}_{\mathrm{z}}|^3} \quad .$$

e) Wie oben das Potenzial setzt sich auch die Feldstärke aus der Überlagerung der beiden einzelnen Feldstärken $\vec{E}_{\mathrm{ges}} = \vec{E}_{\mathrm{a}} + \vec{E}_{\mathrm{b}}$ zusammen. Das Feld eines Dipols lautet allgemein

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \left[3 \cdot \left(\vec{p} \circ \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \vec{p}\right] \quad ,$$

also folgt

$$\vec{E}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_{\mathrm{z}}|^3} \left[3 \cdot \left((p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}) \circ \frac{(\vec{r} - a\vec{e}_{\mathrm{z}})}{|\vec{r} - a\vec{e}_{\mathrm{z}}|}\right) \frac{\vec{r} - a\vec{e}_{\mathrm{z}}}{|\vec{r} - a\vec{e}_{\mathrm{z}}|} - (p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}})\right]$$

$$\vec{E}_{\mathrm{b}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} + a\vec{e}_{\mathrm{z}}|^3} \left[3 \cdot \left((-p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}) \circ \frac{(\vec{r} + a\vec{e}_{\mathrm{z}})}{|\vec{r} + a\vec{e}_{\mathrm{z}}|}\right) \frac{\vec{r} + a\vec{e}_{\mathrm{z}}}{|\vec{r} + a\vec{e}_{\mathrm{z}}|} - (-p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}})\right] \quad .$$

f) Die Oberflächenladung resultiert aus $\varrho_{\mathrm{S}} = \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{z=0}$. Hier ist $\vec{D}_1 = 0$ und $\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \vec{E}_{\mathrm{ges}}$. Daraus resultiert

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathrm{S}} = \quad & \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \left[3 \cdot \left(\frac{x \cdot p_{\mathrm{x}} - a \cdot p_{\mathrm{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}\right) \frac{x\vec{e}_{\mathrm{x}} + y\vec{e}_{\mathrm{y}} - a\vec{e}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} - p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} - p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}\right] \circ \vec{e}_{\mathrm{z}} \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \left[3 \cdot \left(\frac{-x \cdot p_{\mathrm{x}} + a \cdot p_{\mathrm{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}\right) \frac{x\vec{e}_{\mathrm{x}} + y\vec{e}_{\mathrm{y}} + a\vec{e}_{\mathrm{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} + p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} - p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}\right] \circ \vec{e}_{\mathrm{z}} \\ = \quad & \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \left[\frac{3a \cdot (-x \cdot p_{\mathrm{x}} + a \cdot p_{\mathrm{z}})}{x^2 + y^2 + a^2} - p_{\mathrm{z}}\right] \end{aligned}$$