Lösung der Aufgabe 5.2.4

Überarbeitet: MaKi

Aufgabe

Die Ebene $z = 0$ sei die Grenzfläche des geerdeten metallischen Halbraums $z < 0$. Längs der z-Achse liegt im Abschnitt $0 < z \leq \ell$ eine Linienladung der konstanten Linienladungsdichte ϱ_L. Gesucht ist das elektrostatische Potential im Halbraum $z > 0$ mit $\epsilon = \epsilon_0$.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet das Potential einer Linienladung im freien Raum? Verwenden Sie das Coulomb-Integral und suchen Sie zunächst nur eine Stammfunktion.

c) Skizzieren Sie eine Ersatzladungsverteilung im freien Raum, die das gleiche Potential wie die Linienladung vor der Metalloberfläche erzeugt.

d) Wie lautet das Potential im Raum $z \geq 0$?

e) Wie lautet die Oberflächenladungsdichte auf der Metalloberfläche?

f) Welche Oberflächenladungsdichte stellt sich im Fall $\ell \to \infty$ auf der metallischen Grenzfläche ein?

Lösung

a) Skizze: Siehe Abbildung 1.

b) Das Coulomb Integral lautet:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\varrho_V\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \mathrm{d}^3 r'$$

Mit

$$\varrho_V\{\vec{r}'\} = \varrho_L \delta\{x'\}\delta\{y'\} \cdot \begin{cases} 1 \text{ für } 0 < z < l \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

folgt das Potential der Linienladung

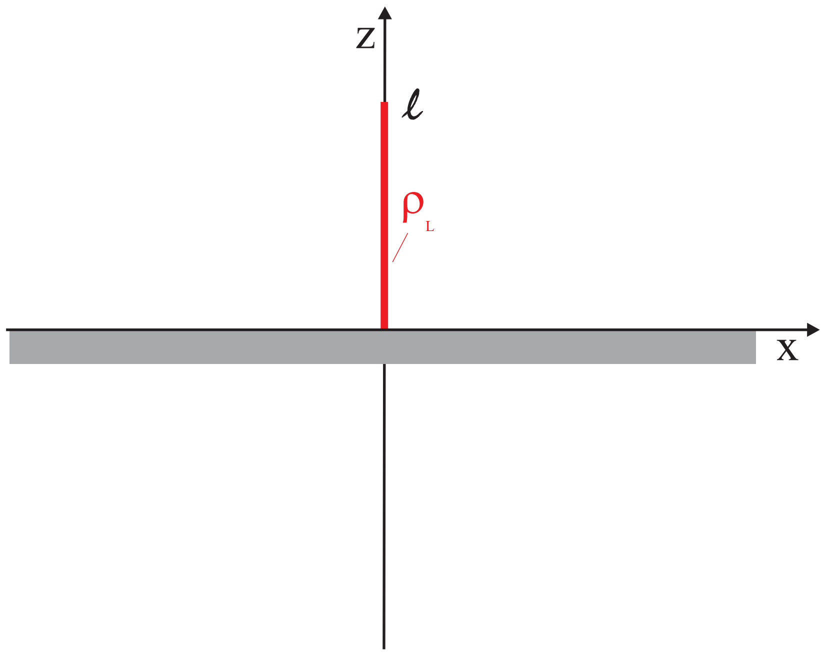

Abbildung 1: Skizze

$$
\begin{aligned}
V_L &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\varrho_L \int \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}\,\mathrm{d}z' \\
&\quad \text{mit } \rho^2 = x^2+y^2 \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\varrho_L \int \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\,\mathrm{d}z' \\
&\quad \text{mit } \int \frac{1}{\sqrt{1+w^2}}\,\mathrm{d}w = \operatorname{arsinh}\{w\} = \ln\{w+\sqrt{w^2+1}\} \\
&= \frac{\varrho_L}{4\pi\varepsilon_0} \operatorname{arsinh}\left\{\frac{z'-z}{\rho}\right\} + C
\end{aligned}
$$

c) Skizze der Ersatzladungsverteilung siehe Abbildung 2.

d) Potential im Raum $z \geq 0$

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{\varrho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_0^l \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\,\mathrm{d}z' - \int_{-l}^0 \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}}\,\mathrm{d}z'\right] \\
&= \frac{\varrho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\operatorname{arsinh}\left\{\frac{l-z}{\rho}\right\} - \operatorname{arsinh}\left\{\frac{-z}{\rho}\right\} - \operatorname{arsinh}\left\{\frac{-z}{\rho}\right\} + \operatorname{arsinh}\left\{\frac{-l-z}{\rho}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

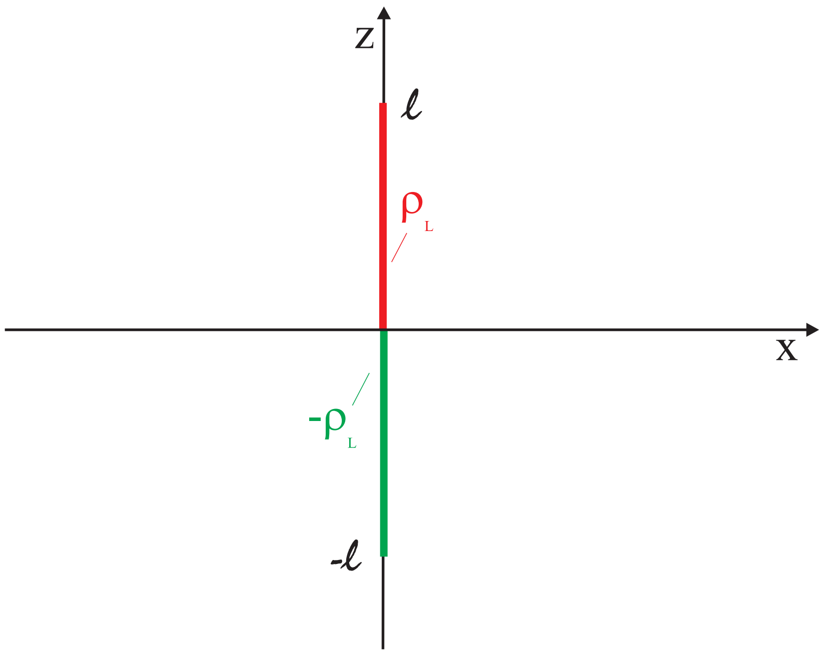

Abbildung 2: Ersatzladungsverteilung

e) Oberflächendichte auf der Metallplatte

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \circ \vec{D} &= \varrho_V = \varrho_S \delta\{z\} \\
\frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z &= \varrho_s \delta\{z\} \\
\text{mit } D_x\Big|_{z=0} &= D_y\Big|_{z=0} = 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} D_z &= \varrho_S \delta\{z\} \\
D_z\Big|_{z=0} &= \int \varrho_S \delta\{z\} \, \mathrm{d}z = \varrho_S \\
\Rightarrow E_z\Big|_{z=0} &= \frac{\varrho_S}{\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Andererseits muss auch gelten:

$$
\begin{aligned}
E_z\Big|_{z=0} &= -\frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0} \\
&= \frac{\varrho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{l-z}{\rho})^2}}\left(-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{2}{\sqrt{1+(\frac{z}{\rho})^2}}\left(\frac{1}{\rho}\right)\;+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{l+z}{\rho})^2}}\left(-\frac{1}{\rho}\right)\right]\Bigg|_{z=0} \\
&= -\frac{\varrho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+l^2}}\right] \\
\Rightarrow \varrho_S &= -\frac{\varrho_L}{2\pi}\left[\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2+l^2}}\right]
\end{aligned}
$$

f) Oberflächendichte für $l \to \infty$

$$\varrho_S = -\frac{\varrho_L}{2\pi\rho}$$