Lösung der Aufgabe 5.2.5

Überarbeitet: MaKi

Aufgabe

Der Raum ist für $x > 0$ mit einem Medium der Dielektrizitätszahl ϵ_1, für $x \leq 0$ mit einem Material der Dielektrizitätszahl ϵ_2 gefüllt. Auf der x-Achse befindet sich eine Punktladung Q_0 bei $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)^T$ mit $x_0 > 0$. Die Trennfläche zwischen beiden Medien ist ladungsfrei.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

Für die Berechnung des Potentials im Bereich 1 ($x \geq 0$) wird bei $x = -x_2$ eine Spiegelladung Q_2 angenommen. Entsprechend verfährt man für das Potential im Bereich 2 ($x < 0$), d.h. es wird bei $x = x_1$ eine Ladung Q_1 angenommen.

b) Wie lautet das Potential V_1 bzw. V_2 in den Bereichen 1 bzw. 2 unter der jeweiligen Annahme der virtuellen Ladung Q_2 bzw. Q_1?

c) Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ an der Grenzfläche $x = 0$?

d) Bestimmen Sie die Größen x_1, x_2, Q_1 und Q_2 aus den Stetigkeitsbedingungen unter der Annahme, dass die Größen von den Koordinaten des Aufpunktes $\vec{r}$ unabhängig sind.

e) Wie lautet das Potential im gesamten Raum?

f) Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

Lösung

a) Skizze:

b) bei $x = -x_2$ eine Spiegelladung Q_2 und ebenso
bei $x = x_1$ eine Spiegelladung Q_1

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\frac{Q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x+x_2)^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left[\frac{Q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} + \frac{Q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}}\right]$$

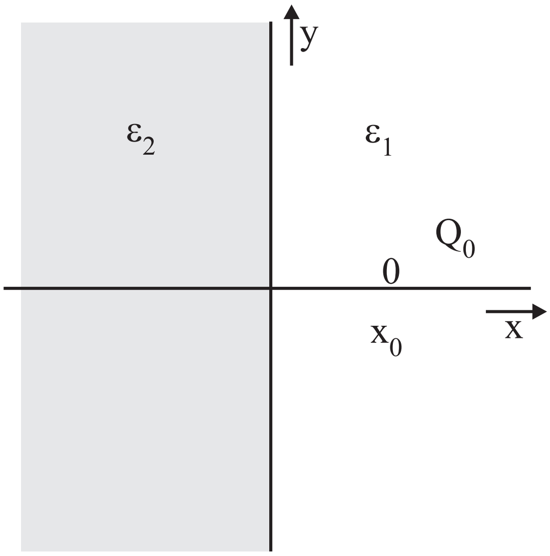

Abbildung 1: Ladungsanordnung gegenüber einer ebenen Trennfläche zwischen verschiedenen Halbräumen.

c) An der Grenzfläche $x = 0$ muss E_{tan} stetig sein:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial V_1}{\partial y}\right|_{x=0} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\frac{-yQ_0}{\sqrt{(-x_0)^2+y^2+z^2}^3}+\frac{-yQ_2}{\sqrt{x_2^2+y^2+z^2}^3}\right]\\
\overset{!}{=}\left.\frac{\partial V_2}{\partial y}\right|_{x=0} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\frac{-yQ_0}{\sqrt{(-x_0)^2+y^2+z^2}^3}+\frac{-yQ_1}{\sqrt{(-x_1)^2+y^2+z^2}^3}\right]\\
\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{-yQ_0}{r_0^3}+\frac{-yQ_2}{r_2^3}\right] &= \frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{-yQ_0}{r_0^3}+\frac{-yQ_1}{r_1^3}\right]
\end{aligned}$$

Weiterhin muss an der Grenzfläche $x = 0$ auch D_{norm} stetig sein:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1\left.\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{x=0} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-(x-x_0)Q_0}{\sqrt{(-x_0)^2+y^2+z^2}^3}+\frac{-(x+x_2)Q_2}{\sqrt{+x_2^2+y^2+z^2}^3}\right]\\
\overset{!}{=}\varepsilon_2\left.\frac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{x=0} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-(x-x_0)Q_0}{\sqrt{(-x_0)^2+y^2+z^2}^3}+\frac{-(x-x_1)Q_2}{\sqrt{(-x_1)^2+y^2+z^2}^3}\right]\\
\Rightarrow -\frac{x_2Q_2}{{r_2}^3} &= \frac{x_1Q_1}{{r_1}^3}\\
Q_2 &= -\frac{x_1}{x_2}\frac{r_2^3}{r_1^3}Q_1
\end{aligned}$$

d) Das obige Ergebnis soll unabhängig vom Aufpunkt sein!

$$\begin{aligned} &\rightarrow r_2 = r_1 \\ &\rightarrow x_2 = x_1 \\ &\Rightarrow Q_2 = -Q_1 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Stetigkeitsbedingung für $\vec{E}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{Q_0}{r_0^3} - \frac{Q_1}{r_1^3}\right] &= \frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{Q_0}{r_1^3} + \frac{Q_1}{r_1^3}\right] \\ \Rightarrow Q_1 &= Q_0 \frac{r_1^3}{r_0^3} \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \end{aligned}$$

Auch dies soll um Aufpunkt unabhängig sein!

$$\begin{aligned} &\rightarrow r_1 = r_0 \\ &\rightarrow x_1 = x_0 \\ &\Rightarrow Q_1 = Q_0 \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 + \varepsilon_1)} \end{aligned}$$

e) Das Potential lautet also

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + y^2 + z^2}}\right) & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

f) Das elektrische Feld lautet

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_1} \left(\dfrac{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2}} + \dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \dfrac{\begin{pmatrix} x + x_0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\sqrt{(x + x_0)^2 + y^2 + z^2}} \right) & \text{für } x \geq 0 \\ \dfrac{2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \dfrac{\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y^2 + z^2}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$