Lösung der Aufgabe 5.2.6

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Der Raum ist für $x > 0$ mit einem Medium der Dielektrizitätszahl ϵ_1, für $x \leq 0$ mit einem Material der Dielektrizitätszahl ϵ_2 gefüllt. Auf der x-Achse befindet sich eine Punktladung Q_0 bei $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)^T$ mit $x_0 > 0$. Die Trennfläche zwischen beiden Medien ist ladungsfrei.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

Für die Berechnung des Potentials im Bereich 1 ($x \geq 0$) wird bei $x = -x_2$ eine Spiegelladung Q_2 angenommen. Entsprechend verfährt man für das Potential im Bereich 2 ($x < 0$), d.h. es wird bei $x = x_1$ eine Ladung Q_1 angenommen.

b) Wie lautet das Potential V_1 bzw. V_2 in den Bereichen 1 bzw. 2 unter der jeweiligen Annahme der virtuellen Ladung Q_2 bzw. Q_1?

c) Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ an der Grenzfläche $x = 0$?

d) Bestimmen Sie die Größen x_1, x_2, Q_1 und Q_2 aus den Stetigkeitsbedingungen unter der Annahme, dass die Größen von den Koordinaten des Aufpunktes $\vec{r}$ unabhängig sind.

e) Wie lautet das Potential im gesamten Raum?

f) Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

Lösung

a) Skizze:

b) bei $x = -x_2$ eine Spiegelladung Q_2 und ebenso
bei $x = -x_1$ eine Spiegelladung Q_1

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\frac{Q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} + \frac{Q_2}{\sqrt{(x+x_2)^2+y^2+z^2}}\right]$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\left[\frac{Q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} + \frac{Q_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}}\right]$$

c) Die Randbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ an der Grenzfläche $x = 0$ lauten:

$$\frac{\partial}{\partial y} V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\frac{-yQ_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}^3} + \frac{-yQ_2}{\sqrt{(x+x_2)^2+y^2+z^2}^3}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\left[\frac{-yQ_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}^3} + \frac{-yQ_1}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}^3}\right]$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{-yQ_0}{r_0^3} + \frac{-yQ_2}{r_2^3}\right] = \frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{-yQ_0}{r_0^3} + \frac{-yQ_1}{r_1^3}\right]$$

d)

$$\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x} V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-(x-x_0)Q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}^3} + \frac{-(x+x_2)Q_2}{\sqrt{(x+x_2)^2+y^2+z^2}^3}\right]$$

$$\varepsilon_2\frac{\partial}{\partial x} V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-(x-x_0)Q_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}^3} + \frac{-(x-x_1)Q_2}{\sqrt{(x-x_1)^2+y^2+z^2}^3}\right]$$

$$-\frac{x_2Q_2}{{r_2}^3} = \frac{x_1Q_1}{{r_1}^3}$$

$$Q_2 = -\frac{x_1}{x_2}\frac{r_2^3}{r_1^3}Q_1 \neq f\{y,z\} \;\rightarrow\; r_2 = r_1 \;\rightarrow\; x_2 = x_1 \quad Q_2 = -Q_1$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\left[\frac{Q_0}{r_0^3} - \frac{Q_1}{r_1^3}\right] = \frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{Q_0}{r_1^3} + \frac{Q_1}{r_1^3}\right]$$

$$Q_1 = Q_0\frac{r_1^3}{r_0^3}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)} \neq f\{y,z\} \;\rightarrow\; r_1 = r_0 \; x_1 = x_0$$

$$Q_1 = Q_0\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}$$

e) Das Potential lautet

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} + \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\dfrac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2+z^2}}\right) & \text{für } x \geq 0 \\ \dfrac{2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\dfrac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

f) Das elektrische Feld lautet

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon_1}\left(\dfrac{\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} + \dfrac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\dfrac{\begin{pmatrix} x+x_0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2+z^2}}\right) & \text{für } x \geq 0 \\ \dfrac{2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\dfrac{\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y \\ z \end{pmatrix}}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2+z^2}} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$