# Lösung der Aufgabe 5.2.8

*Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!*

## Aufgabe

In der Höhe $h$ oberhalb des Mittelpunktes einer ideal leitenden, geerdeten Kugel vom Durchmesser $D_1$ befindet sich eine kreisförmige Linienladung $\varrho_L$ vom Durchmesser $D_2 > D_1$. Die Achse der Linienladung verläuft durch den Mittelpunkt der Kugel. Der Ursprung eines Zylinderkoordinatensystems sei so gewählt, dass er im Mittelpunkt der Kugel liegt. Die $z-$ Achse verlaufe durch den Mittelpunkt der Linienladung.

a) Geben Sie eine Ersatzladungsverteilung an, durch die die Wirkung der Kugel auf das elektrische Feld berücksichtigt werden kann.

b) Berechnen Sie das resultierende Feld der Anordnung auf der $z-$ Achse.

c) Es gelte $h = 0$. Geben Sie alle Nullstellen der Feldstärke auf der $z-$ Achse innerhalb und außerhalb des Kugelbereichs an.

# Lösung

a) Spiegelung eines Ladungsinkrements an der Kugel

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}q' &= -\mathrm{d}q \cdot \frac{R_1}{d} \\
d' &= \frac{R_1^2}{d} \\
\mathrm{d}q &= \varrho_\mathrm{L} \cdot R_2 \cdot \mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}q' &= \varrho_\mathrm{L}' \cdot R' \cdot \mathrm{d}\varphi' \qquad \mathrm{d}\varphi' = \mathrm{d}\varphi \\
d &= \sqrt{R_2^2 + h^2} \\
\frac{d'}{d} &= \frac{R_1^2}{d^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2 + h^2} = D
\end{aligned}$$

$$\varrho_\mathrm{L}' \cdot R' \cdot \mathrm{d}\varphi' = -\frac{R_1}{d} \cdot \varrho_\mathrm{L} \cdot R_2 \cdot \mathrm{d}\varphi \qquad \Rightarrow \varrho_\mathrm{L}' = -\varrho_\mathrm{L} \cdot \frac{R_1 R_2}{\sqrt{R_2^2 + h^2} \cdot R'} = -\varrho_\mathrm{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}}$$

$$\frac{R'}{R_2} = \frac{d'}{d} = D \qquad \Rightarrow R' = D \cdot R_2$$

b)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int\limits_{V'} \frac{\varrho_\mathrm{V}\{r'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}(\vec{r} - \vec{r}')\mathrm{d}^3 r' \qquad \text{außerhalb der Kugel}$$

Zylinder Koordinaten:

$$\begin{aligned} \varrho_\mathrm{V} &= \varrho_\mathrm{L} \cdot \delta\{r' - R_2\} \cdot \delta\{z' - h\} + \varrho'_\mathrm{L} \cdot \delta\{r' - R'\} \cdot \delta\{z' - h'\} \\ \vec{r}' &= (r' \cdot \cos\{\varphi'\}, r' \cdot \sin\{\varphi'\}, z')_R^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \varrho_\mathrm{L} R_2 \cdot \frac{(r \cdot \cos\{\varphi\} - R_2 \cdot \cos\{\varphi'\}, r \cdot \sin\{\varphi\} - R_2 \cdot \sin\{\varphi'\}, z - h)_R^T}{(r^2 - 2rR_2\cos\{\varphi - \varphi'\} + R_2^2 + (z-h)^2)^{3/2}} \cdot \mathrm{d}\varphi' \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \varrho'_\mathrm{L} R' \cdot \frac{(r \cdot \cos\{\varphi\} - R' \cdot \cos\{\varphi'\}, r \cdot \sin\{\varphi\} - R' \cdot \sin\{\varphi'\}, z - h')_R^T}{(r^2 - 2rR'\cos\{\varphi - \varphi'\} + R'^2 + (z-h')^2)^{3/2}} \cdot \mathrm{d}\varphi' \end{aligned}$$

Feld auf der Achse: $r = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int\limits_0^{2\pi} \left( \varrho_\mathrm{L} \frac{(-R_2 \cdot \cos\{\varphi'\}, -R_2 \cdot \sin\{\varphi'\}, z - h)_R^T}{(R_2^2 + (z-h)^2)^{3/2}} \right. \\ &\qquad \left. + \varrho'_\mathrm{L} \cdot \frac{(-R' \cdot \cos\{\varphi'\}, -R' \cdot \sin\{\varphi'\}, z - h)_R^T}{(R'^2 + (z-h)^2)^{3/2}} \right) \cdot \mathrm{d}\varphi' \\ E_\mathrm{x} &= 0, \qquad E_\mathrm{y} = 0 \\ E_\mathrm{z} &= \frac{2\pi}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\varrho_\mathrm{L}(z-h) \cdot R_2}{(R_2^2 + (z-h)^2)^{3/2}} + \frac{\varrho'_\mathrm{L}(z-h') \cdot R'}{(R'^2 + (z-h')^2)^{3/2}} \right) \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{L} R_2}{2\epsilon_0} \cdot \left( \frac{(z-h)}{(R_2^2 + (z-h)^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{D} \cdot (z-h')}{(D^2 R_2^2 + (z-h')^2)^{3/2}} \right) \\ \frac{h'}{h} &= \frac{d}{d'} = D \qquad \Rightarrow \qquad h' = D \cdot h \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{L} R_2}{2\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{z-h}{(R_2^2 + (z-h)^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{D}(z - Dh)}{(D^2 R_2^2 + (z-Dh)^2)^{3/2}} \right] \end{aligned}$$

c)

$$h = 0$$

$$E_{\mathrm{z}} = \frac{\varrho_{\mathrm{L}} R_2 z}{2\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{1}{(R_2^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{\sqrt{D}}{(D^2 R_2^2 + z^2)^{3/2}} \right]$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \sqrt{D} \cdot (R_2^2 + z^2)^{3/2} &= (D^2 R_2^2 + z^2)^{3/2} \\ \sqrt[3]{D}(R_2^2 + z^2) &= D^2 R_2^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$z^2 = R_2^2 \cdot \frac{\sqrt[3]{D} - D^2}{1 - \sqrt[3]{D}} \qquad z_{1,2} = \pm R_2 \cdot \left[ \frac{\sqrt[3]{D} - D^2}{1 - \sqrt[3]{D}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{D} - D^2}{1 - \sqrt[3]{D}} \geq 0 \qquad \text{wegen} \qquad 1 > \sqrt[3]{D} > D > D^2$$

$$\lim_{D \to 0} z_{1,2} = \pm R_2 \cdot \sqrt[6]{D} = \pm R_2 \cdot \sqrt[6]{\left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2} = \pm \sqrt[3]{R_1 R_2^2} > R_1 \qquad \Rightarrow \text{außerhalb der Kugel}$$