Lösung der Aufgabe 5.2.9

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Ein unendlich langer geradliniger Leiter mit dem konstanten Strom I ist im Abstand a parallel zur Trennebene zweier Medien mit den Permeabilitäten μ_1 und μ_2 angeordnet. Berechnen Sie die magnetische Induktion der Anordnung. Die Aufgabe kann formal genauso gelöst werden wie (4.7.5). Verwenden Sie die dort ermittelten Ergebnisse unter Berücksichtigung der Dualität zwischen elektrischem und magnetischem Feld (Analogie: Bildladungen $\leftrightarrow$ Bildströme).

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Welche Ersatzladungsanordnungen können zur Berechnung der Felder in den Bereichen 1 ($x \geq 0$) und 2 ($x < 0$) herangezogen werden (Skizzen)?

b) Wie lautet das Magnetfeld $\vec{H}$ eines Stromfadens im freien Raum? Der Stromfaden ist in z-Richtung orientiert und befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems. Verwenden Sie kartesische Koordinaten (Einheitsvektoren und Parameter).

c) Wie lautet das Magnetfeld des Stromfadens, wenn er bei $x = d$ liegt?

d) Wie groß ist das Magnetfeld im Bereich 1, wenn der Spiegelstrom die Größe I_2 hat? Wie groß ist $\vec{B}_1$?

e) Welches Magnetfeld $\vec{H}_2$ herrscht im Bereich 2, wenn der Orginalstrom I zu $I' = I + I_1$ modifiziert wird? Wie groß ist $\vec{B}_2$?

f) Wie lauten die Randbedingungen an der Grenzfläche $x = 0$?

g) Welche Größen müssen I_2 und I_1 annehmen, damit die Randbedingungen erfüllt sind?

h) Wie lautet das Magnetfeld im gesamten Raum?

i) Welche Größe hat $\vec{B}$ in den beiden Bereichen?

Lösung

b)

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e_\varphi} = \frac{I}{2\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\left((x-d)^2+y^2\right)} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{H}_{(I)} = \frac{I}{2\pi\left((x-d)^2+y^2\right)} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{I_2}{2\pi\left((x+d)^2+y^2\right)} \begin{pmatrix} -y \\ x+d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_{(I)} = \mu_1 \vec{H}_{(I)}$$

e)

$$\vec{H}_{(II)} = \frac{I'}{2\pi\left((x-d)^2+y^2\right)} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_{(II)} = \mu_2 \vec{H}_{(II)}$$

f)

$$B_{X(I)} = B_{X(II)}$$

$$H_{Y(I)} = H_{Y(0)}$$

g)

$$x = 0$$

$$\begin{aligned} -dI + dI_2 &= -dI' \qquad (\Leftarrow H_{Tan}) \\ \mu_1 I + \mu_1 I_2 &= \mu_2 I' \qquad (\Leftarrow B_{Norm}) \\ {}_i + I_2 &= -I' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_1 I + \mu_1 I_2 &= \mu_2 I - \mu_2 I_2 \\ I_2 &= I \frac{\mu_2 - \mu 1}{\mu_2 + \mu_1} \end{aligned}$$

$$I' = I\frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$$

h)

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi}\begin{cases} \frac{1}{((x-d)^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\mu_2-\mu 1}{\mu_2+\mu_1}\frac{1}{((x+d)^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y \\ x+d \\ 0 \end{pmatrix} & (I) \\ \frac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\frac{1}{((x-d)^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} & (II) \end{cases}$$