# Lösung der Aufgabe 5.4.2

*Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!*

## Aufgabe

Zwei in $z-$ Richtung unendlich ausgedehnte metallische Zylinder mit gleichem Radius $2a$ und Mittelpunkten bei $(4a, 0, 0)$ und $(-a, 0, 0)$ liegen auf den Potentialen $V_1$ und $V_2$. Die Potenzialverteilung soll mit Hilfe der konformen Abbildung $w\{z\} = \frac{1}{z}$ ermittelt werden.

a) Skizzieren Sie die Anordnung in der $z-$ Ebene mit allen Randbedingungen und charakteristischen Punkten.

b) Wie lauten die Kreisgleichungen für die beiden Zylinder in der z-Ebene?

c) Wie lauten die Gleichungen aus b) nach Transformation in die $w$-Ebene und Umformung auf eine Normalenform? (Beachten Sie: Kreise werden in Kreise oder Geraden abgebildet.)

d) Skizzieren Sie die Anordnung in der $w$-Ebene mit allen charakteristischen Punkten und Randbedingungen.

Das Potential der hier gefundenen Abbildung kann mit einigem Wissen direkt angegeben werden. Einfacher ist es jedoch, die konforme Abbildung $w' = \ln\{w - w_0\}$ anzuwenden. Hierbei ist $w_0$ der Mittelpunkt der Anordnung.

e) Skizzieren Sie die Anordnung in der $w'$-Ebene. Geben Sie die charakteristischen Punkte an.

f) Wie lautet das komplexe Potential in der $w'$-Ebene? Berechnen Sie die komplexen Potentiale in der $w$- und $z$-Ebene durch Rücktransformation. Wie lautet das reelle Potential in der $z$-Ebene?

g) Wie lautet das elektrische Feld in der $z$-Ebene?

## Lösung

a) Skizze

b) Zylinder I:

$$
\begin{aligned}
(x-4a)^2 + y^2 &= (x - 4\,a)^2 - (i\,y)^2 && (1)\\
&= (x - 4\,a + i\,y) \cdot (x - 4\,a - i\,y) && (2)\\
&= (z - 4\,a) \cdot (z^* - 4\,a) = (2\,a)^2 && (3)
\end{aligned}
$$

Zylinder II: analog

$$(z+a)\cdot(z^*+a) = (2\,a)^2 \tag{4}$$

c)

$$w\{z\} = \frac{1}{z} \iff z\{w\} = \frac{1}{w} \tag{5}$$

I:

$$\left(\frac{1}{w} - 4a\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{w}\right)^* - 4a\right) = (2a)^2 \tag{6}$$

$$\left(\frac{1\cdot w^*}{w\cdot w^*}\right)^* = \left(\frac{w^*}{|w|^2}\right)^* = \frac{(w^*)^*}{|w|^2} = \frac{w}{|w|^2} \tag{7}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{w\cdot w^*} - \frac{4\,a}{w} - \frac{4\,a}{w^*} + 16\,a^2 = 4\,a^2 \;\Big|\cdot(w\;w^*) \tag{8}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - 4\,a\cdot(w^*+w) = -12\,a^2\cdot w\cdot w^* \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - 4\,a\cdot 2\cdot u + 12\,a^2\cdot(u^2+v^2) = 0 \;\Big|\; : 12\,a^2 \tag{10}$$

$$\Leftrightarrow \qquad u^2 + v^2 - \frac{2}{3\;a}\cdot u + \frac{1}{12\,a^2} = 0 \tag{11}$$

$$\Leftrightarrow \qquad u^2 - 2\cdot\frac{1}{3\,a}\cdot u + \left(\frac{1}{3\,a}\right)^2 - \frac{1}{9\,a^2} + \frac{1}{12\,a^2} + v^2 = 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad \left(u - \frac{1}{3\,a}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{6\,a}\right)^2 \tag{13}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Kreis mit Mittelpunkt:} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\,a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und Radius:} \qquad r = \frac{1}{6\,a}$$

II:

$$\left(\frac{1}{w} + a\right)\cdot\left(\frac{1}{w^*} + a\right) = \frac{1}{w\,w^*} + a^2 + a\cdot\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{w^*}\right) = 4\,a^2 \;\Big|\cdot(w\,w^*) \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 + w\, w^* \cdot a^2 + a\,(w + w^*) = 4\, a^2 \cdot w\, w^* \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - 3\, a^2 \cdot (u^2 + v^2) + 2\, a \cdot u = 0 \;\Big|\; : (-3\, a^2) \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow \qquad -\frac{1}{3\, a^2} + u^2 + v^2 - \frac{2}{3\, a} \cdot u = 0 \tag{17}$$

$$\Leftrightarrow \qquad u^2 - \frac{2}{3\, a} \cdot u + \left(\frac{1}{3\, a}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\, a}\right)^2 - \left(\frac{1}{3\, a^2}\right) + v^2 = 0 \tag{18}$$

$$\left(u - \frac{1}{3\, a}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{2}{3\, a}\right)^2 \tag{19}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Kreis mit Mittelpunkt:} \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3\, a} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und Radius:} \qquad r = \frac{2}{3\, a}$$

d)

Das Potential der hier gefundenen Abbildung kann mit einigem Wissen direkt angegeben werden. Einfacher ist es jedoch, die konforme Abbildung $w' = \ln\{w - w_0\}$ anzuwenden. Hierbei ist $w_0$ der Mittelpunkt der Anordnung.

e)

$$w' = \ln\{w - w_0\} \tag{20}$$

mit $w_0 = u_0 = \frac{1}{3\, a}$; $v_0 = \frac{1}{6\, a}$

$$w'\{w = w_0\} = \ln\{0\} = -\infty \tag{21}$$

$$w'\{w = u_0 + i\, v_0\} = \ln\{u_0 - u_0 + i\, v_0\} = \ln\{i\, v_0\} = \ln\{v_0\} + i \cdot \frac{\pi}{2} \tag{22}$$

$$w'\{w = u_0 - v_0\} = \ln\{u_0 - v_0 - u_0\} = \ln\{-v_0\} = \ln\{v_0\} + i \cdot \pi \tag{23}$$

$$w'\{w = u_0 + v_0\} = \ln\{v_0\} \tag{24}$$

allgemein: $w' = \mathrm{Ln}\{\mathrm{w} - \mathrm{w_0}\} = \ln\{|\mathrm{w} - \mathrm{w_0}|\} + \mathrm{i} \cdot (\arg\{\mathrm{w} - \mathrm{w_0}\} + 2\, \mathrm{k}\, \pi)$

f)

$$\begin{aligned} V\{w'\} &= V_1 + (V_2 - V_1) \cdot \frac{w' - \ln\left\{\frac{1}{6\,a}\right\}}{\ln\left\{\frac{2}{3\,a}\right\} - \ln\left\{\frac{1}{6\,a}\right\}} && (25) \\ &= V_1 + (V_2 - V_1) \cdot \frac{w' - \ln\left\{\frac{1}{6\,a}\right\}}{\ln\{4\}} && (26) \end{aligned}$$

$w-$Ebene:

$$\begin{aligned} V\{w\} &= V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \left( \ln\left\{ w - \frac{1}{3\,a} \right\} - \ln\left\{ \frac{1}{6\,a} \right\} \right) && (27) \\ &= V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \ln\left\{ \frac{w - \frac{1}{3\,a}}{\frac{1}{6\,a}} \right\} && (28) \\ &= V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \ln\{6\,a\,w - 2\} && (29) \end{aligned}$$

$z-$Ebene:

$$V\{z\} = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \ln\left\{ \frac{6\,a}{z} - 2 \right\} \qquad (30)$$

$$\begin{aligned} Re\{V\{z\}\} &= V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \ln\left\{ \left| \frac{6\,a}{z} - 2 \right| \right\} && (31) \\ &= V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \ln\left\{ 2 \cdot \left| \frac{3\,a - z}{z} \right| \right\} && (32) \\ &= V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \left( \ln\{2\} - \ln\left\{ \frac{1}{|3\,a - z|} \right\} + \ln\left\{ \frac{1}{|z|} \right\} \right) && (33) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (V_1 + V_2) + \frac{V_2 - V_1}{\ln\{4\}} \cdot \left( \ln\left\{ \frac{1}{|z|} \right\} - \ln\left\{ \frac{1}{|z - 3\,a|} \right\} \right) && (34) \end{aligned}$$

g)

$$\vec{E}\{x, y\} = -\nabla\,\Phi = -\left( \frac{\partial\,\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\,\Phi}{\partial y}, 0 \right)^T \qquad (35)$$

$$\begin{aligned} \Phi\{x, y\} &= \frac{\varrho_L}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \ln\left\{ \frac{1}{|x + i\,y - x_0 - i\,y_0|} \right\} && (36) \\ &= \frac{\varrho_L}{2\,\pi\,\varepsilon_0} \cdot \ln\left\{ \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \right\} && (37) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_x &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} && (38)\\
&= +\frac{\varrho_L}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\cdot\frac{2\,(x-x_0)}{2\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}^3} && (39)\\
&= \frac{\varrho_L}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} && (40)\\
E_y &= \frac{\varrho_L}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\cdot\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} && (41)
\end{aligned}
$$

hier:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \frac{V_2-V_1}{\ln\{4\}}\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{x-3\,a}{(x-3\,a)^2+y^2}\right) && (42)\\
E_y &= \frac{V_2-V_1}{\ln\{4\}}\cdot\left(\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{y}{(x-3\,a)^2+y^2}\right) && (43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad E = E_x + i\,E_y &= \frac{V_2-V_1}{\ln\{4\}}\cdot\left(\frac{x+i\,y}{x^2+y^2}-\frac{(x-3\,a)+i\,y}{(x-3\,a)^2+y^2}\right) && (44)\\
&= \frac{V_2-V_1}{\ln\{4\}}\cdot\left(\frac{z}{|z|^2}-\frac{z-3\,a}{|z-3\,a|^2}\right) && (45)
\end{aligned}
$$