Lösung der Aufgabe 5.4.6

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

In der komplexen z-Ebene ist eine geerdete Metallfolie bei $x \geq 0$ und $y = 0$ angebracht. Parallel zu dieser Schneide liegt eine Linienladung ϱ_l bei $z = z_0$. Die elektrische Feldstärke soll im gesamten Raum mit Hilfe des komplexen Potentials unter Verwendung der Abbildung $z = -w^2$ berechnet werden.

a) Skizzieren Sie die Anordnung in der z-Ebene.

b) Skizzieren Sie die beiden Anordnungen in der w-Ebene.

Für die weitere Rechnung wählen Sie den Bereich, an dem $u_0 > 0$ ist.

c) Welche Koordinaten beschreiben die Äquipotenzialfläche $V = 0$ in der w-Ebene?

d) Welche Ersatzladungsverteilung erzeugt in der w-Ebene das gleiche Potential? Geben Sie Größe und Ort der Ladungsverteilung an.

e) Wie lautet das komplexe Potential in der w-Ebene?

f) Wie lautet die Randbedingung für das komplexe elektrische Feld auf der Äquipotenzialfläche $V = 0$ in der w-Ebene?

g) Berechnen Sie $\nabla_w V$.

h) Welches Potenzialproblem liegt hier vor? Vergleichen Sie die Ergebnisse aus f) und g) und entscheiden Sie an Hand der Formel zur Berechnung des elektrischen Feldes.

i) Welche Größe hat das elektrische Feld in der z-Ebene? Verwenden Sie die parametrische Darstellung $z = g\{w\}$.

k) Wie lautet die Umkehrfunktion $w = f\{z\} = g^{-1}\{z\}$?

l) Wie lautet das komplexe Potential in der z-Ebene? Warum gibt es <u>keine</u> weitere Spiegelladung?

m) Berechnen Sie das komplexe elektrische Feld in der z-Ebene und vergleichen Sie mit der Lösung aus i) durch Einsetzen.

Lösung

a)

b)

c)

$$u = 0 \quad , \quad -\infty < v < \infty$$

d)

$$-\varrho_l \quad \text{bei} \quad -w_0^*$$

e)

$$V_w = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0} \operatorname{Ln}\left\{\frac{w + w_0^*}{w - w_0}\right\}$$

f)

$$E_v = 0 \quad \text{oder} \quad \operatorname{Im}\{E\} = 0$$

g)

$$\nabla_w V_w = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{w + w_0^*} - \frac{1}{w - w_0}\right]$$

h)

$$\begin{aligned} \nabla_w V_w &= \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{u + iv + u_0 - iv_0} - \frac{1}{u + iv - u_0 - iv_0}\right] \\ \nabla_w V_w\Big|_{u=0} &= \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{u_0 + i(v - v_0)} + \frac{1}{u_0 - i(v - v_0)}\right] \\ &= \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2u_0}{u_0^2 + (v - v_0)^2} \end{aligned}$$

Reell, deshalb $\operatorname{Im}\{\nabla_w V\} = 0$, deshalb Originalproblem.

i)

$$\begin{aligned} E^*(z) &= -\frac{\nabla_w V}{\nabla_w z} \\ &= -\frac{\nabla_w V}{\nabla_w(-w^2)} \\ &= \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{w + w_0^*} - \frac{1}{w - w_0}\right]\frac{1}{2w} \end{aligned}$$

k)

$$w = \pm i\sqrt{z}$$

Wegen $\operatorname{Re}\{w\} > 0$ ist negatives Vorzeichen und von z die Hauptwurzel zu wählen.

l)

$$V_z = \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0} \operatorname{Ln}\left\{\frac{\sqrt{z}-(\sqrt{z_0})^*}{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}\right\}$$

Da $(\sqrt{z_0})^*$ immer negativen Imaginärteil hat, $\sqrt{z}$ dagegen positiven, verschwindet die Differenz nicht.

m)

$$E^*(z) \quad = \quad \frac{\varrho_l}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{z}-(\sqrt{z_0})^*} - \frac{1}{\sqrt{z}-\sqrt{z_0}}\right]\frac{1}{2\sqrt{z}}$$