Lösung der Aufgabe 8.2.2

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Aufgabe wie in der Klausur

Eine ebene Welle fällt aus dem Halbraum $x > 0$ in der x-z-Ebene auf die Grenzfläche $x = 0$. Das elektrische Feld ist $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)\exp\{i(\vec{k}_\mathrm{in} \circ \vec{r} - \omega t)\}$. Die Brechzahlen sind $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$ für $x \leq 0$ bzw. für $x > 0$. Der ganze Raum ist unmagnetisch und enthält keine freien Ladungen.

- Wie lautet der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle?
- Bestimmen Sie jeweils den TE- und den TM-Anteil des einfallenden Feldes.
- Wie lauten die zugehörigen magnetischen Feldstärken?
- Welche Größe haben die Ausbreitungsvektoren der reflektierten und der transmittierten Welle?

Lösung

Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle muss zum Einen die Dispersionsrelation erfüllen und zum Anderen senkrecht auf dem zugehörigen Feld stehen. Gemäß Aufgabe muss für den Wellenzahlvektor der Ansatz $\vec{k}_\mathrm{in} = k_\mathrm{x}\vec{e}_x + k_\mathrm{z}\vec{e}_z$ gewählt werden. Die Welle läuft in negative x- Richtung, somit gilt $k_\mathrm{x} < 0$. Die Dispersionsrelation erfordert $k_\mathrm{x}^2 + {k_\mathrm{z}}^2 = (n_2 k_0)^2 = (2k_0)^2$. $\vec{k}$ und $\vec{E}$ stehen zueinander senkrecht, wenn gilt $\vec{k} \circ \vec{E} = 0$. Somit resultiert

$$\vec{k}_\mathrm{in} \circ \vec{E}_\mathrm{in} = E_0(k_\mathrm{x} + \mathrm{z})\exp\{i(\vec{k}_\mathrm{in} \circ \vec{r} - \omega t)\} = 0 \quad .$$

Es resultiert mit obigen Ergebnissen

$$\vec{k}_\mathrm{x} = \sqrt{2}k_0(-\vec{e}_x + \vec{e}_z) \quad .$$

Zur Bestimmung des TE bzw. des TE Anteils wird der Lateralvektor $\vec{e}_\ell$ benötigt, der sowohl senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor als auch auf den Normalenvektor zur Grenzfläche steht. Die Grenzfläche liegt bei $x = 0$. Somit ist die Wahl $\vec{n} = \vec{e}_x$ eine gute Wahl. Der Lateralvektor lautet also

$$\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}}{\|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|} = \frac{\vec{e}_x \times (sqrt2k_0(-\vec{e}_x + \vec{e}_z))}{\|\vec{e}_x \times (\sqrt{2}k_0(-\vec{e}_x + \vec{e}_z))\|} = \frac{-\sqrt{2}k_0\vec{e}_y)}{\| - \sqrt{2}k_0\vec{e}_y)\|} = -\vec{e}_y \quad .$$

Somit ist der TE- Anteil des elektrische Feldes

$$\vec{E}_{\text{in}\mathsf{TE}} = (\vec{e}_\ell \circ \vec{E}_{\text{in}})\vec{e}_\ell = E_0\vec{e}_y \quad .$$

Der TM- Anteil ist der Rest:

$$\vec{E}_{\text{in}\mathsf{TM}} = \vec{E}_{\text{in}} - \vec{E}_{\text{in}\mathsf{TE}} = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \quad .$$

Die zugehörige magnetische Feldstärke resultiert aus

$$\vec{H}_{\text{in}} = \frac{\vec{k}_{\text{in}} \times \vec{E}_{\text{in}}}{\omega\mu\mu_0} = \frac{\sqrt{2}k_0E_0}{\omega\mu\mu_0}(\vec{e}_z + 2\vec{e}_y - \vec{e}_x)$$

bzw. jeweils für die Anteile

$$\vec{H}_{\text{in}\mathsf{TE}} = \frac{\vec{k}_{\text{in}} \times \vec{E}_{\mathsf{TE}}}{\omega\mu\mu_0} = \frac{-\sqrt{2}k_0E_0}{\omega\mu\mu_0}(-\vec{e}_z - \vec{e}_x)$$

und

$$\vec{H}_{\text{in}\mathsf{TM}} = \frac{\vec{k}_{\text{in}} \times \vec{E}_{\mathsf{TM}}}{\omega\mu\mu_0} = 2\frac{\sqrt{2}k_0E_0}{\omega\mu\mu_0}\vec{e}_y \quad .$$

Zur Berechnung der Wellenzahlvektoren der einfallenden und reflektierten Wellen müssen die Tangential- und Normalkomponenten bestimmt werden. Das Snelliusgesetz besagt, dass die Tangentialkomponenten aller Wellenzahlvektoren identisch sind:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}\text{in}) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{k}_{\text{tr}} - \vec{k}\text{in}) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Tangentialkomponente des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle lautet

$$(\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}) \times \vec{n} = k_z\vec{e}_z = \sqrt{2}k_0\vec{e}_z \quad .$$

Mit Hilfe des Reflexionsgesetzes

$$\vec{n} \circ (k_{\text{ref}} + k_{\text{in}}) = 0$$

ergibt sich die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der reflektierten Welle zu

$$(\vec{n} \circ k_{\text{ref}})\vec{n} = -(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})\vec{n} = \sqrt{2}k_0\vec{e}_x$$

und somit resultiert für den Wellenzahlvektor der reflektierten Welle

$$\vec{k}_{\mathrm{ref}} = \sqrt{2}k_0(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \quad .$$

Mit dem Snelliusgesetz resultiert die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle aus der Dispersionsrelation $\|\vec{k}_{\mathrm{tr}}\| = n_1 k_0$ zu

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - k_{\mathrm{z}}^2} = k_0\sqrt{-1} = \pm i K_0 \quad ,$$

wobei das Vorzeichen noch zu ermitteln ist. Dies ergibt sich dadurch, dass das Feld im Bereich 1 in großem Abstand zur Grenzfläche (∞ weit weg) verschwinden muss. Betrachtet man nur den Einfluss der Normalkomponente des Wellenzahlvektors ergibt sich der Term $\exp\{i(\pm i k_0 x)\} = \exp\{\mp k_0 x\}$. Die Koordinate x nimmt in großem Abstand zur Grenzfläche negative Werte an. Entsprechend ist nur $\exp\{k_0\sqrt{2}x\}$ physikalisch sinnvoll und daraus resultiert, dass das negative Vorzeichen in der Bestimmung der Normalkomponente des Wellenzahlvektors gewählt werden muss. Dies ist konsistent mit dem negativen Vorzeichen bei der Normalkomponente des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle. Es resultiert also

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = k_0(-i\vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_z) \quad .$$