Lösung der Aufgabe 8.2.3

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung des Energietransportes bei der Reflexion einer ebenen Welle an einer ruhenden ebenen Grenzfläche. Die einfallende Welle breitet sich im Halbraum $x < 0$ mit dem Wellenvektor $\vec{k}_{\text{in}} = (k_\text{x}, k_\text{y}, 0)^\text{T}$ aus. Das elektrische Feld ist wie in Aufgabe 7.2.1 mit $\vec{E}_{\text{in}} = (E_\text{x}, E_\text{y}, E_\text{z})^\text{T} = \left(\hat{E}_\text{x}, \hat{E}_\text{y}, \hat{E}_\text{z}\right)^\text{T} \exp\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}$ mit reellen Amplituden $\hat{E}$ zu nehmen. Die Dielektrizitätszahl ist $\varepsilon_1\varepsilon_0$ für $x \leq 0$ bzw. $\varepsilon_2\varepsilon_0$ für $x > 0$. Der ganze Raum ist unmagnetisch und enthält keine freien Ladungen.

a) Womit wird der Energietransport durch elektromagnetische Felder in einem Medium beschrieben? Welche Größe beschreibt den Energietransport einer ebenen Welle?

b) Welche Größe hat die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle? Wie lautet das zugehörige magnetische Feld? Geben Sie beide Felder an der Grenzfläche an. Hier kann auf die Ergebnisse aus Aufgabe 7.2.1 zurückgegriffen werden.

c) Wie lautet das aus einfallender und reflektierter Welle resultierende Feld im Halbraum $x < 0$?

d) Geben Sie die zeit- und ortsgemittelte Richtung des Energieflusses im Halbraum $x < 0$ an. (Diese Berechnung ist sehr zeitaufwändig!)

Lösung

a) Der Energietransport wird durch den Poyntingvektor erfasst:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad .$$

Für eine ebene Welle muss der raum- und zeitgemittelte Poyntingvektor bestimmt werden. Im Zeitmittel resultiert für zeitharmonische Felder, wie sie hier vorliegen

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\} \quad .$$

Die Mittelung über den gesamten Raum ist danach noch durchzuführen.

b) Die Feldstärken der reflektierten Welle ergeben sich aus den Amplituden $\vec{E}_{\mathrm{in,TE}}$ und $\vec{H}_{\mathrm{in,TM}}$ der einfallenden Welle mit den entsprechenden Reflexionsfaktoren und dem zugehörigen Ausbreitungsterm. Hier muss zunächst die einfallende Welle mit

$$\vec{E}_{\mathrm{in}} = (\hat{\vec{E}}_{\mathrm{TE}} + \hat{\vec{E}}_{\mathrm{TM}}) \exp\{i(\vec{k}_{\mathrm{in}} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

geschrieben werden, wobei

$$\begin{aligned}
\hat{\vec{E}}_{\mathrm{TE}} &= \hat{E}_{\mathrm{z}} \vec{e}_{\mathrm{z}} \\
\hat{\vec{E}}_{\mathrm{TM}} &= \hat{E}_{\mathrm{x}} \vec{e}_{\mathrm{x}} + \hat{E}_{\mathrm{y}} \vec{e}_{\mathrm{y}} \\
&= (k_{\mathrm{y}} \vec{e}_{\mathrm{x}} - k_{\mathrm{x}} \vec{e}_{\mathrm{y}}) \frac{1}{k_{\mathrm{y}}} \hat{E}_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

gelten. Die magnetische Feldstärke ist entsprechend

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{\mathrm{in}} &= (\hat{\vec{H}}_{\mathrm{TE}} + \hat{\vec{H}}_{\mathrm{TM}}) \exp\{i(\vec{k}_{\mathrm{in}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \\
\hat{\vec{H}}_{\mathrm{TM}} &= \frac{1}{\omega \mu_0} (k_{\mathrm{x}} \hat{E}_{\mathrm{y}} - k_{\mathrm{y}} \hat{E}_{\mathrm{x}}) \vec{e}_{\mathrm{z}} \\
&= -\frac{1}{\omega \mu_0} \frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}} \hat{E}_{\mathrm{x}} \vec{e}_{\mathrm{z}} \\
\hat{\vec{H}}_{\mathrm{TE}} &= (k_{\mathrm{y}} \vec{e}_{\mathrm{x}} - k_{\mathrm{x}} \vec{e}_{\mathrm{y}}) \hat{E}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}$$

Die Feldstärken der reflektierten Welle sind dann

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\mathrm{ref,TE}} &= r_{\mathrm{TE}} \hat{\vec{E}}_{\mathrm{TE}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathrm{ref}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \\
&= r_{\mathrm{TE}} \hat{E}_{\mathrm{z}} \vec{e}_{\mathrm{z}} \exp\{i(-k_{\mathrm{x}} x + k_{\mathrm{y}} y - \omega t)\}
\end{aligned}$$

Entsprechend folgt für das magnetische Feld

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{\mathrm{ref,TM}} &= r_{\mathrm{TM}} \hat{\vec{H}}_{\mathrm{TM}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathrm{ref}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \\
&= -r_{\mathrm{TM}} \frac{1}{\omega \mu_0} \frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}} \hat{E}_{\mathrm{x}} \vec{e}_{\mathrm{z}} \exp\{i(-k_{\mathrm{x}} x + k_{\mathrm{y}} y - \omega t)\}
\end{aligned}$$

Die jeweils zugehörigen Felder ergeben sich zu

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_{\mathrm{ref,TE}} &= \frac{1}{\omega\mu_0}(\vec{k}_{\mathrm{ref}} \times \vec{E}_{\mathrm{ref,TE}}) = r_{\mathrm{TE}}\frac{1}{\omega\mu_0}\hat{E}_{\mathrm{z}}\left((-k_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}}) \times \vec{e}_{\mathrm{z}})\right) \exp\{i(-k_{\mathrm{x}}x + k_{\mathrm{y}}y - \omega t)\} \\
&= r_{\mathrm{TE}}\frac{1}{\omega\mu_0}(k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + k_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{y}})\hat{E}_{\mathrm{z}} \exp\{i(-k_{\mathrm{x}}x + k_{\mathrm{y}}y - \omega t)\} \\
\vec{E}_{\mathrm{ref,TM}} &= \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}(\vec{H}_{\mathrm{ref,TM}} \times \vec{k}_{\mathrm{ref}}) \\
&= r_{\mathrm{TM}}\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{\omega\mu_0}\frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}}(k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + k_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{y}})\hat{E}_{\mathrm{x}} \exp\{i(-k_{\mathrm{x}}x + k_{\mathrm{y}}y - \omega t)\} \\
&= r_{\mathrm{TM}}\frac{1}{k_{\mathrm{y}}}(k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + k_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{y}})\hat{E}_{\mathrm{x}} \exp\{i(-k_{\mathrm{x}}x + k_{\mathrm{y}}y - \omega t)\}
\end{aligned}
$$

c) Die Gesamtfelder im Medium 1 lauten

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_1 = \Big[&(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})\hat{E}_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}} + \\
&(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})\hat{E}_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} - \\
&(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} - r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})\frac{k_{\mathrm{x}}}{k_{\mathrm{y}}}\hat{E}_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{y}}\Big] \exp\{i(k_{\mathrm{y}}y - \omega t)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_1 = \frac{1}{\mu_0\omega}\Big[&-(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})\frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}}\hat{E}_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{z}} + \\
&(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})k_{\mathrm{y}}\hat{E}_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{x}} - \\
&(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} - r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})k_{\mathrm{x}}\hat{E}_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{y}}\Big] \exp\{i(k_{\mathrm{y}}y - \omega t)\}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\overline{\vec{S}}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_1 \times \vec{H}_1^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{S}_{\mathrm{m}}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{S}_{\mathrm{m}} &= \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* \\
&= \frac{1}{\omega\mu_0}\Bigg[\\
&\quad (\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} - r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})^* k_{\mathrm{x}}^* |\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{x}} \\
&\quad +(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})^* k_{\mathrm{y}}^* |\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{y}} \\
&\quad +(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})^* \frac{\|\vec{k}^*\|^2}{k_{\mathrm{y}}^*} |\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{y}} \\
&\quad -(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} - r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})^* k_{\mathrm{x}}^* \hat{E}_{\mathrm{x}} \hat{E}_{\mathrm{z}}^* \vec{e}_{\mathrm{z}} \\
&\quad +(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} - r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})^* \frac{k_{\mathrm{x}}}{k_{\mathrm{y}}} \frac{\|\vec{k}^*\|^2}{k_{\mathrm{y}}^*} |\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{x}} \\
&\quad +(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} - r_{\mathrm{TM}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})(\exp\{ik_{\mathrm{x}}x\} + r_{\mathrm{TE}}\exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\})^* \frac{k_{\mathrm{x}}}{k_{\mathrm{y}}} k_{\mathrm{y}}^* \hat{E}_{\mathrm{x}} \hat{E}_{\mathrm{z}}^* \vec{e}_{\mathrm{z}} \Bigg] \quad .
\end{aligned}
$$

In verlustlosen Medien ist $\mathrm{Im}\left\{\vec{k}_{\mathrm{in}}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\vec{k}_{\mathrm{ref}}\right\} = 0$, also $k_{\mathrm{x}} = k_{\mathrm{x}}^*$, $k_{\mathrm{y}} = k_{\mathrm{y}}^*$. Ausmultiplizieren und Vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
\vec{S}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\omega\mu_0}\Bigg[& \\
& \left(1 - |r_{\mathrm{TE}}|^2 + 2i\mathrm{Im}\left\{r_{\mathrm{TE}}\exp\{-i2k_{\mathrm{x}}x\}\right\}\right) k_{\mathrm{x}} |\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{x}} \\
& + \left(1 + |r_{\mathrm{TE}}|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{r_{\mathrm{TE}}\exp\{-i2k_{\mathrm{x}}x\}\right\}\right) k_{\mathrm{y}} |\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{y}} \\
& + \left(1 + |r_{\mathrm{TM}}|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{r_{\mathrm{TM}}\exp\{-i2k_{\mathrm{x}}x\}\right\}\right) \frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}} |\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{y}} \\
& + \left(1 - |r_{\mathrm{TM}}|^2 + 2i\mathrm{Im}\left\{r_{\mathrm{TM}}\exp\{-i2k_{\mathrm{x}}x\}\right\}\right) \frac{k_{\mathrm{x}}}{k_{\mathrm{y}}} \frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}} |\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2 \vec{e}_{\mathrm{x}} \\
& -2\left(r_{\mathrm{TM}}\exp\{-i2k_{\mathrm{x}}x\} - r_{\mathrm{TE}}^*\exp\{i2k_{\mathrm{x}}x\}\right) k_{\mathrm{x}} \hat{E}_{\mathrm{x}} \hat{E}_{\mathrm{z}}^* \vec{e}_{\mathrm{z}} \Bigg] \quad .
\end{aligned}
$$

Der Zeitgemittelte Poyntingvektor ist also

$$
\begin{aligned}
\overline{\vec{S}}_1 = \frac{1}{2\omega\mu_0}\Bigg[& \\
& \left(1-|r_{\mathrm{TE}}|^2\right) k_{\mathrm{x}}|\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2\vec{e}_{\mathrm{x}} + \left(1-|r_{\mathrm{TM}}|^2\right)\frac{k_{\mathrm{x}}}{k_{\mathrm{y}}}\frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}}|\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2\vec{e}_{\mathrm{x}} \\
& + \left(1+|r_{\mathrm{TE}}|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{r_{\mathrm{TE}}\right\}\cos\{2k_{\mathrm{x}}x\} + 2\mathrm{Im}\left\{r_{\mathrm{TE}}\right\}\sin\{2k_{\mathrm{x}}x\}\right) k_{\mathrm{y}}|\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2\vec{e}_{\mathrm{y}} \\
& + \left(1+|r_{\mathrm{TM}}|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{r_{\mathrm{TM}}\right\}\cos\{2k_{\mathrm{x}}x\}2\mathrm{Im}\left\{r_{\mathrm{TM}}\right\}\sin\{2k_{\mathrm{x}}x\}\right)\frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}}|\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2\vec{e}_{\mathrm{y}} \\
& -2\left(\mathrm{Re}\left\{r_{\mathrm{TM}}\right\}\cos\{2k_{\mathrm{x}}x\} + \mathrm{Im}\left\{r_{\mathrm{TM}}\right\}\cos\{2k_{\mathrm{x}}x\}\right. \\
& \left. -\mathrm{Re}\left\{r_{\mathrm{TE}}\right\}\cos\{2k_{\mathrm{x}}x\} - \mathrm{Im}\left\{r_{\mathrm{TE}}\right\}\sin\{2k_{\mathrm{x}}x\}\right) k_{\mathrm{x}}\hat{E}_{\mathrm{x}}\hat{E}_{\mathrm{z}}^{*}\vec{e}_{\mathrm{z}}\Bigg] \quad .
\end{aligned}
$$

Nach Raummittelung fallen alle ortsabhängigen Terme weg:

$$
\begin{aligned}
\left\langle\overline{\vec{S}}_1\right\rangle = \frac{1}{2\omega\mu_0}\Bigg[& \\
& \left(1-|r_{\mathrm{TE}}|^2\right) k_{\mathrm{x}}|\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2\vec{e}_{\mathrm{x}} + \left(1-|r_{\mathrm{TM}}|^2\right)\frac{k_{\mathrm{x}}}{k_{\mathrm{y}}}\frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}}|\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2\vec{e}_{\mathrm{x}} \\
& + \left(1+|r_{\mathrm{TE}}|^2\right) k_{\mathrm{y}}|\hat{E}_{\mathrm{z}}|^2\vec{e}_{\mathrm{y}} + \left(1+|r_{\mathrm{TM}}|^2\right)\frac{\|\vec{k}\|^2}{k_{\mathrm{y}}}|\hat{E}_{\mathrm{x}}|^2\vec{e}_{\mathrm{y}}\Bigg] \quad .
\end{aligned}
$$

Das Ergebnis kann wie folgt gelesen werden: Zunächst transportieren die beiden Anteile TE (proportional zu E_{z}) und TM (proportional zu E_{x}) unabhängig voneinander die Energie. Der jeweilige Nettotransport in Normalenrichtung zur Grenzfläche ($\vec{e}_{\mathrm{x}}$) ist durch die Differenz von hinlaufender und rücklaufender Welle bestimmt, während der Energietransport parallel zur Grenzfläche ($\vec{e}_{\mathrm{y}}$) von beiden gemeinsam getragen wird.