Lösung der Aufgabe 10.2.1

Vorläufige Version, noch nicht korrigiert!

Aufgabe

Sie haben zwei Rechteckhohlleiter mit den Querschnittsabmessungen a_1, b_1 und a_2, b_2 sowie der Länge L. Es sollen Signale der Frequenz f durch die Wellenleiter übertragen werden. Wählen Sie die Abmessungen der Wellenleiter so, dass jeweils nur eine Eigenwelle ausbreitungsfähig ist. Die Signale sollen am Ende der beiden Wellenleiter eine Phasenverschiebung von π zueinander aufweisen. Die Länge der Hohlleiter soll dabei minimal bleiben. Die Wellenleiter seien mit Luft gefüllt.

a) Wie lauten die Grenzfrequenzen für die Eigenwellen in den Hohlleitern?

b) In welchem Frequenzbereich müssen die Hohlleiter betrieben werden, damit sich in jedem nur eine Eigenwelle ausbreitet?

c) Wie muss das Verhältnis der Abmessungen gewählt werden, wenn der Einmodigkeitsbereich maximal groß werden soll?

d) Was resultiert daraus für die Abmessungen bei gegebener Betriebsfrequenz.

e) Wie lauten die Ausbreitungskonstanten in z-Richtung in beiden Wellenleitern für die Grundwelle?

f) Welche Phasenverschiebung zwischen den Eigenwellen der beiden Hohlleiter resultiert am Ende bei gleichphasiger Einspeisung?

g) Welche Bedingung muss an die Ausbreitungskoeffizienten gestellt werden, damit die Phasenverschiebung maximal wird?

h) Welche minimale Länge müssen die Hohlleiter aufweisen?

Lösung

a) Zeichnung

Grenzfrequenz für Eigenwelle aus Seperationsbedingung:

$$k^2 = (2\pi f)^2 \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 = k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2 = \left(\frac{2\pi n f}{c}\right)^2, \qquad n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \qquad c^{-1} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

Grenzfrequenz: $f = f_\mathrm{c} \qquad \Rightarrow k_\mathrm{z} = 0$

$$k_\mathrm{x} = l\pi \cdot \frac{1}{a}, \qquad k_\mathrm{y} = m\pi \cdot \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow f_\mathrm{c} = \frac{c}{2\pi n} \cdot \sqrt{\left(\frac{l \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m \cdot \pi}{b}\right)^2} = \frac{c}{2n} \cdot \sqrt{\left(\frac{l}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}$$

b) Eine Eigenwelle ist ausbreitungsfähig, wenn $k_\mathrm{z} > 0$ ist $\qquad \Rightarrow f > f_\mathrm{c}$

$$\begin{aligned} &\text{TE-Wellen:} \qquad l \neq 0 \vee m \neq 0 \\ &\text{TM-Wellen:} \qquad l \neq 0 \wedge m \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ kleinste Grenzfrequenz:

$$f_\mathrm{c10} = \frac{c}{2na} \qquad (l = 1, m = 0)$$

weitere:

$$\begin{aligned} f_\mathrm{c01} &= \frac{c}{2nb} = f_\mathrm{c10} \cdot \left(\frac{b}{a}\right) > f_\mathrm{c10} \\ f_\mathrm{c11} &= \frac{c}{2n}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2} = f_\mathrm{c10} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)} \geq f_\mathrm{c01} \\ f_\mathrm{c20} &= \frac{c}{na} = 2 \cdot f_\mathrm{c10} \end{aligned}$$

Nur eine Eigenwelle: $\qquad f_\mathrm{c10} < f < \min\{f_\mathrm{c01}, f_\mathrm{c20}\} \qquad$ TE-Welle

c) maximaler Frequenzbereich $\qquad \Rightarrow f_\mathrm{c01} = f_\mathrm{c20}$

$$\Rightarrow \frac{c}{na} = \frac{c}{2nb} \qquad a = 2b$$

$$\frac{c}{na} < f \wedge \frac{c}{2nb} < f \rightarrow \frac{??}{f} ??? \frac{???}{f}$$

d) Phasenverschiebung bei verschiedenen Rechteckhohlleitern nach Länge $L : \triangle\varphi = \pi$

$$\triangle\varphi = k_{\mathrm{z2}} \cdot L - k_{\mathrm{z1}} \cdot L = L(k_{\mathrm{z2}} - k_{\mathrm{z2}})$$

e) Wie lauten die Ausbreitungskonstanten in z-Richtung in beiden Wellenleitern für die Grundwelle?

$$k_{\mathrm{z}} = \sqrt{k^2 - k_{\mathrm{x}}^2 - k_{\mathrm{y}}^2}$$

TE_{01}-Welle:

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{z}} &= \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = k \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{ka}\right)^2} = \frac{2\pi f n}{c} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{c}{2fna}\right)^2} \\ &= \frac{2\pi f n}{c} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\mathrm{c10}}}{f}\right)^2} \end{aligned}$$

f)

$$\triangle\varphi = \frac{2\pi f n L}{c} \cdot \left[\sqrt{1 - \left(\frac{f_{10,2}}{f}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{f_{10,1}}{f}\right)^2}\right] = \pi$$

g) Minimale Länge: $k_{\mathrm{z10,1}} = 0, \qquad k_{10,2}$ maximal $\Rightarrow$

$$f = f_{\mathrm{c10,1}} = \frac{c}{2na_1}, \qquad f = f_{\mathrm{c20,2}} = 2 \cdot f_{\mathrm{c10,2}} = \frac{c}{na_2}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \triangle\varphi = \frac{2\pi c n L}{n a_2 c} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{1 - (-1)^2}\right] = \pi \\ &\Rightarrow a_2 = 2L \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \cdot L \qquad \Rightarrow L \geq \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot a_2 \end{aligned}$$