Aufgabensammlung

zur Vorlesung

Elektromagnetische Felder und Wellen

J. Mähnß

Stand: 5. August 2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlegende Gesetze der Elektrostatik

1.1 Das Coulombsche Gesetz und die elektrische Ladung

Aufgabe 1.1.1

Aufgabe wie in der Klausur

Im Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks der Kantenlänge a, in dessen Eckpunkten sich positive Ladungen der Größe $Q_l = q$ (mit $l \in \{1, 2, 3\}$) befinden, wird eine negative Ladung Q_4 angebracht. Welche Größe muss Q_4 annehmen, damit die Kraft auf **alle** Ladungen verschwindet?

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie groß ist die Feldstärke am Ort $\vec{r}$ die von einer einzelnen Punktladung am Ort $\vec{r}_l$ mit der Ladung Q_l hervorgerufen wird?

b) Wie lauten die Quellpunktvektoren für die vier Punktladungen?

c) Welche Größe hat die Gesamtfeldstärke $\vec{E}$ an einem beliebigen Punkt $\vec{r} \neq \vec{r}_l$ im Raum?

d) Welche Feldstärke herrscht im Zentrum des Dreiecks, wenn die Ladung Q_4 dort nicht wäre?

e) Welche Feldstärke wird in einer Ecke des Dreiecks durch die drei übrigen Ladungen erzeugt, falls in dieser Ecke keine Ladung sitzt?

f) Welche Größe muss Q_4 haben, damit diese Feldstärke verschwindet?

1.2 Die elektrische Feldstärke

Aufgabe 1.2.1

In einem van der Graaf-Generator wird Hochspannung durch Transport von Ladungen auf eine Sammelkugel erzeugt.

a) Wie groß ist die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um eine Ladung q über eine Strecke L auf die mit Q homogen geladene Kugel vom Radius R zu bringen?

Die mittlere mechanische Leistung zum Transport der Ladungen auf die Kugel beträgt P.

b) Wieviele Ladungen pro Zeiteinheit werden im Mittel zur Kugel transportiert.

Aufgabe 1.2.2

Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ des Elektrischen Feldes einer Punktladung Q auf einer Geraden, die im Abstand a an der Ladung vorbei führt. Ist die Rotation überall 0?

Aufgabe 1.2.3

Aufgabe wie in der Klausur

Auf den Ecken eines Quadrats der Seitenlänge a sind vier gleichgroße Ladungen Q_j unterschiedlichen Vorzeichens so angeordnet, dass benachbarte Ladungen unterschiedliche Polarität besitzen. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass eine Ecke mit positiver Ladung des Quadrats im Ursprung liegt, und zwei Seiten mit der positiven x- bzw. y-Achse zusammenfallen. Die elektrische Feldstärke soll für Punkte auf der x-Achse mit $x \gg a$ berechnet werden.

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Welche Richtung hat die elektrische Feldstärke auf den Symmetrieachsen des Quadrats?

b) Wie lautet die elektrische Feldstärke im Raum an einem Punkt $\vec{r} \neq \vec{r_j}$?

c) Wie groß ist die Feldstärke auf der x-Achse?

d) Die x-Abhängigkeit der x- und y-Komponente der Feldstärke soll näherungsweise durch Reihenentwicklung gewonnen werden, dabei soll nur das Verhalten auf der positiven x-Achse untersucht werden. Klammern Sie zunächst x^2 aus den Nennern aus und ersetzen Sie dann $v = \frac{a}{x}$. Wie lautet die Taylorentwicklung der einzelnen Ausdrücke um $v = 0$ (McLaurin-Reihe)? Brechen Sie dabei die (resultierende) Reihenentwicklung nach den quadratischen Gliedern ab. Es ist zweckmäßig, die Feldstärke als Produkt von einzelnen Funktionen zu schreiben und diese einzeln zu untersuchen.

1.3 Felder kontinuierlicher Ladungsverteilungen

Aufgabe 1.3.1

In der Erdatmosphäre besteht ein radiales, zum Erdmittelpunkt gerichtetes elektrisches Feld, dessen Feldstärke am Boden E_1(= 300 V/m) und in der Höhe H(= 1500 m) noch E_2(= 25 V/m) beträgt. Unter der Annahme, dass die Erde ein Leiter vom Radius R(= 6370 km) ist und die Feldstärke linear mit zunehmender Höhe abnimmt, soll die Raumladungsdichte in der Atmosphäre und die Flächenladungsdichte auf der Erdoberfläche berechnet werden.

Aufgabe 1.3.2

Aufgabe wie in der Klausur

Das elektrische Feld eines unendlich ausgedehnten Raumladungsgitters mit der Verteilung $\varrho_V = \varrho_0 \cos\{\alpha x\} \cos\{\beta y\} \cos\{\gamma z\}$ ist zu bestimmen.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet der allgemeine differentielle Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und ϱ_V?

b) Separieren Sie die Differentialgleichung mit einem Summenansatz für ϱ_V gemäß Anhang des Vorlesungsskripts. Wie lauten die separierten Differentialgleichungen?

c) Berechnen Sie die Lösung der separierten Differentialgleichungen. Die Integrationskonstanten können zu Null angenommen werden. Wie lautet der Ausdruck für die elektrische Feldstärke $\vec{E}$?

d) Zur Bestimmung der Separationskonstanten kann der in der Elektrostatik gültige Ausdruck $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ herangezogen werden. Wie groß sind die Separationskonstanten?

e) Welche Größe hat das resultierende elektrische Feld?

Aufgabe 1.3.3

In einem hohlkugelförmigen Raumbereich mit $a \leq r \leq b$ existiert eine ortsabhängige Raumladung der Dichte $\varrho_V = \varrho_0 \cos\{\vartheta\}$. Der gesamte übrige Raum ist ladungsfrei, er hat die Dielektrizitätszahl ϵ_0. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke für Aufpunkte auf der $z-$Achse innerhalb und außerhalb der Kugel.

Aufgabe 1.3.4

Leiten Sie aus dem Ausdruck für die elektrische Feldstärke lokalisierter Ladungen Q_i am Ort r_i

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} Q_i \frac{\vec{r} - \vec{r_i}}{|\vec{r} - \vec{r_i}|^3}$$

die elektrische Feldstärke kontinuierlich verteilter Ladungen Q_i der Raumladungsdichte ϱ_V

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{Vol} \varrho_V\{\vec{r'}\} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3 r'$$

und umgekehrt her.

Aufgabe 1.3.5

Aufgabe wie in der Klausur

Die elektrischen Felder einer linearen und einer kreisförmigen Linienladung der Ladungsdichte ϱ_{L} sollen mit Hilfe des Coulombintegrals ermittelt werden. Der Durchmesser der Ladungsschleife beträgt $2a$. Nehmen Sie an, dass die lineare Linienladung entlang der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegt, bzw. die kreisförmige Linienladung koaxial zur z-Achse ist.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet die Darstellung für die Raumladung ϱ_{V} bei einer geraden Linienladung der Stärke ϱ_{L}?

b) Wie lautet der allgemeine integrale Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und der Raumladungsdichte?

c) Welche Feldstärke resultiert für das elektrische Feld der linearen Linienladung in kartesischer Darstellung?

d) Wie lautet die Darstellung von $\vec{E}$, wenn die kartesischen Einheitsvektoren durch die zylindrischen Einheitsvektoren des Aufpunktes ersetzt werden?

e) Wie lautet die Darstellung von ϱ_{V} für den Fall der kreisförmigen Linienladung mit Stärke ϱ_{L} in ebenen Polarkoordinaten?

f) Wie groß ist die Gesamtladung Q_{L} der Schleife?

g) Berechnen Sie $\vec{E}$ für die kreisförmige Leiterschleife auf der z- Achse.

h) Berechnen Sie das Feld für den Grenzfall beliebig kleinen Durchmessers bei konstanter Gesamtladung Q_{L}.

Aufgabe 1.3.6

In einem hohlkugelförmigen Raumbereich mit $a \leq r \leq b$ existiert eine ortsabhängige Raumladung der Dichte $\varrho_V = \varrho_0/r$. Der gesamte übrige Raum ist ladungsfrei, er hat die Dielektrizitätszahl ϵ_0. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke für Aufpunkte auf der $z-$ Achse innerhalb und außerhalb der Kugel.

Aufgabe 1.3.7

Aufgabe wie in der Klausur

Ein Zylindermantel mit dem Radius a und der Länge 2ℓ trägt die Flächenladungsdichte ϱ_{S}. Die Dielektrizitätszahl ist im ganzen Raum $\varepsilon = 1$. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke für Aufpunkte auf der Achse des Zylinders.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet die allgemeine Darstellung des elektrischen Feldes in integraler Schreibweise?

b) Welches Koordinatensystem ist günstig für die Beschreibung des Problems? Wie lautet die Parametrisierung für den Zylindermantel? Geben Sie eine Darstellung für den Mantel, den Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt und das Volumenelement im gewählten Koordinatensystem an.

c) Wie lautet die Raumladungsdichte ϱ_{V} mit obiger Parametrisierung?

d) Wie vereinfacht sich das Integral mit der vorliegenden Ladungsverteilung für Aufpunkte auf der Zylinderachse?

e) Wie lautet das elektrische Feld auf der Zylinderachse?

Kapitel 2

Elektrostatik

2.1 Energie und Potential

Aufgabe 2.1.1

In Zylinderkoordinaten ist das Potential

$$V = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\rho}$$

gegeben. Berechnen Sie $\vec{\nabla}V$ und $\vec{\nabla} \circ (\vec{\nabla}V)$.

Aufgabe 2.1.2

Aufgabe wie in der Klausur

Zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 haben voneinander den Abstand d. Berechnen Sie die Äquipotenzialfläche, auf der das Potential $V = 0$ herrscht.

Aufgabe 2.1.3

Eine Stecknadel wird auf das Potential V gebracht. Die Feldstärke in der kugelförmigen Spitze muss kleiner als E_{max} bleiben, damit kein Sprühen in der Luft entsteht. Der Radius der Nadelspitze ist R.

a) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Potential und Feldstärke bei einer homogen geladenen Metallkugel?

b) Welches maximale Potential ist für die Nadel erlaubt, wenn die Nadel wie eine Kugel behandelt werden kann? Für Luft liegt die kritische Feldstärke bei $E_{\max} = 25\,\frac{\mathsf{kV}}{\mathsf{cm}}$, der Radius einer typischen Stecknadelspitze beträgt $50\,\mu\mathsf{m}$.

Aufgabe 2.1.4

Aufgabe wie in der Klausur

Die Feldstärke und das Potential einer homogen mit $\varrho\{r\} = \varrho_0$ geladenen Kugel vom Radius R soll innerhalb und außerhalb der Kugel berechnet werden.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet der allgemeine differentielle Zusammenhang zwischen dem elektrischen Feld und der Raumladung?

b) Welche Vereinfachungen können hier aus Symmetriegründen gemacht werden?

c) Wie lautet die Lösung der Differentialgleichung im gesamten Raum?

d) Bestimmen Sie die Integrationskonstanten mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes und Stetigkeitsbedingungen.

e) Welche Größe hat $\vec{E}$ im gesamten Raum?

f) Welcher allgemeine differentielle Zusammenhang besteht zwischen $\vec{E}$ und V? Wie vereinfacht sich der Ausdruck nach obigen Symmetrieüberlegungen?

g) Wie lautet die Lösung der so vereinfachten Differentialgleichung?

h) Ziehen Sie die Stetigkeits- und Randbedingungen zur Bestimmung der Integrationskonstanten von V heran.

i) Welche Größe hat V im gesamten Raum?

Aufgabe 2.1.5

Aufgabe wie in der Klausur

Eine Metallkugel vom Radius a trägt die homogene Oberflächenladungsdichte ϱ_S. Die Dielektrizitätszahl ist ϵ_0. Wie lautet das Potenzial im Raum?

Zusatzfragen für die Übung

Legen Sie den Ursprung des Koordinatensystems in den Kugelmittelpunkt.

a) Wie lautet der allgemeine integrale Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladung und dem Potenzial?

b) Wie kann die Oberflächenladung der Metallkugel als Volumenladungsdichte ϱ_V im Kugelkoordinatensystem beschrieben werden?

c) Wie reduziert sich der Ausdruck für den Abstand zwischen Quell- und Aufpunkt, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass der Aufpunkt gerade auf der z-Achse liegt?

d) Welches Potenzial resultiert auf der z-Achse?

e) Vergleichen Sie das Potenzial mit dem einer Punktladung im Ursprung des Koordinatensystems. Welche Größe hat die Ladung, wenn sie das gleiche Potential im Bereich $|z| > a$ hervorruft?

Aufgabe 2.1.6

Ein Parallelplattenkondensator hat den Plattenabstand d und trägt die Spannung U. Welche Kraft pro Flächeneinheit (Druck- bzw. Zugspannung) herrscht an den Kondensatorplatten? Bei gleicher außen anliegender Spannung wird der Kondensator mit einem Medium der Dielektrizitätszahl ϵ gefüllt. Wie verändert sich die mechanische Spannung?

Aufgabe 2.1.7

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgebracht werden muss, um mit einem zeitlich konstanten Stromfluss die Ladung Q auf eine zunächst ungeladene Kugel mit dem Radius R aufzubringen. Welches Potential hat die Kugel dann?

Hinweis: Betrachten Sie einen Zwischenzustand. Welche Arbeit wird benötigt, um das Ladungsinkrement dq auf die bereits mit q geladene Kugel zu bringen?

2.2 Elektrische Leiter und Dielektrika

Aufgabe 2.2.1

Aufgabe wie in der Klausur

Eine elektrische Leitung besteht aus einem kreiszylindrischen Innenleiter mit Radius a (Querschnitt S_i) und einem sehr dünnen koaxialen Hohlzylinder vom Innendurchmesser $b > a$ und Außendurchmesser $c > b$ (Querschnitt S_a). Auf den beiden Zylindern fließen entgegengesetzt gleich große Ströme $\pm J$. Die Leitfähigkeit des Zylindermaterials ist σ. Die Achsen der Zylinder sind mit der z-Achse eines Koordinatensystems identisch. Im Ursprung des Koordinatensystems wird die Spannung U zwischen Innen- und Außenleiter gemessen. Gesucht ist das elektrische Feld in der Leitung ($0 \leq \rho \leq c$).

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung im Quer- und Längsschnitt (x-y- und x-z-Ebene).

b) Welche Größe hat das elektrische Feld $\vec{E}$ im Innen- und Außenleiter?

c) Wie lautet die Laplacegleichung für das Potential V_2 im Bereich $a \leq r \leq b$ unter Berücksichtigung von Symmetrien?

d) Zur Lösung der Laplacegleichung soll der Produktansatz mit der Separationskonstante k^2 verwendet werden. Wie lautet die Lösung der separierten Differentialgleichung für $g\{z\}$, wenn $k = 0$ bzw. $k \neq 0$ ist?

e) Wie lautet das Potential V_1 im Bereich $0 \leq \rho \leq a$?

f) Wie lautet die Randbedingung für das Potential an der Grenzfläche $\rho = a$?

g) Was resultiert nach Koeffizientenvergleich aus h) für die Separationskonstante k?

h) Was resultiert für die Koeffizienten in V_2 nach Anwendung der Randbedingung an der Grenzfläche $\rho = b$?

i) Wie lautet V_2 unter Berücksichtigung der Bedingung bei $z = 0$?

k) Wie groß ist das elektrische Feld $\vec{E}_2$ im Bereich $a \leq \rho \leq b$?

l) Was resultiert für den Fall unendlich guter Leitfähigkeit?

Aufgabe 2.2.2

Aufgabe wie in der Klausur

Eine Kugel vom Radius R ist gleichförmig in x-Richtung polarisiert mit $\vec{P} = P_0 \cdot \vec{e}_\mathrm{x}$. Die Kugel befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. Das elektrische Potenzial sowie die Raumladungsdichten ϱ_V, ϱ_frei und ϱ_P sollen im gesamten Raum sowie die Flächenladungsdichte ϱ_S auf der Kugeloberfläche berechnet werden.

Hinweis

Vergleichen Sie den Integralausdruck für das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel mit dem Integralausdruck der hier vorliegenden Polarisation.

Zusatzfragen für die Übung

Elektrisches Feld einer homogenen geladenen Kugel

a) Wie lautet das elektrische Feld einer Raumladungsdichte allgemein und für eine homogen geladene Kugel vom Radius R in integraler Schreibweise ?

b) Wie lautet das elektrische Feld einer Raumladungsdichte in differentieller Schreibweise (Gaußsches Gesetz)? Was resultiert aus der Kugelsymmetrie für das Feld? Geben Sie die Integralform des Gaußschen Gesetzes sowie die Lösung mit obigen Ergebnissen im gesamten Raum an.

Potenzial der homogen polarisierten Kugel

c) Wie lautet der integrale Zusammenhang zwischen dem elektrostatischen Potenzial und der Polarisation $\vec{P}$? Wie vereinfacht sich der Zusammenhang für den hier vorliegenden Fall?

d) Welche Lösung ergibt sich für das Potenzial der polarisierten Kugel aus dem Vergleich zwischen den Integralausdrücken für elektrisches Feld und Potenzial im gesamten Raum?

e) Welche Größe hat das elektrische Feld der polarisierten Kugel?

f) Wie groß ist die dielektrische Verschiebung?

g) Berechnen Sie die Raumladungsdichte ϱ_{V}, die Dichte freier Ladungsträger ϱ_{frei} und die Polarisationsladungsdichte ϱ_{P} als Divergenz der zugehörigen Felder.

h) Welche Größe hat die Oberflächenladung der Kugel?

Aufgabe 2.2.3

In einem Medium mit konstanter elektrischer Leitfähigkeit σ fließe ein stationärer Strom, dessen x- und y-Komponenten durch

$$j_x = az, \quad j_y = 2by \qquad \text{mit} \quad a, b = \text{const.}$$

gegeben seien.

a) Berechnen Sie das elektrische Potential !

b) Welche Größe hat die z-Komponente der elektrischen Stromdichte?

Aufgabe 2.2.4

In linearen Medien mit ortsabhängigen Materialparametern $\sigma = \sigma\{\vec{r}\}$ und $\epsilon = \epsilon\{\vec{r}\}$ gilt für den zeitlichen Verlauf der von einem Stromfluss hervorgerufenen Raumladungsverteilung die Beziehung

$$\frac{\epsilon_0 \epsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}} \frac{\partial \varrho\{\vec{r}, t\}}{\partial t} + \varrho\{\vec{r}, t\} = \epsilon_0 \vec{J}\{\vec{r}, t\} \cdot \vec{\nabla} \frac{\epsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}} \,,$$

wenn man die Gültigkeit des differentiellen ohmschen Gesetzes voraussetzt.

a) Leiten Sie die obige Gesetzmäßigkeit aus der Kontinuitätsgleichung unter Annahme zeit- und ortsabhängiger Feldgrößen her.

b) Welcher zeitliche Verlauf der Raumladungsdichte ergibt sich ausgehend von einer Anfangsverteilung $\varrho\{\vec{r}, t = 0\}$, wenn die rechte Seite obiger Gleichung zu Null wird, d.h. z.B. im Fall eines homogenen Mediums oder keines Stromflusses?

c) Wie lautet die Zeitabhängigkeit von $\varrho\{\vec{r}, t\}$ bei bekanntem $\vec{J}\{\vec{r}, t\}$?

d) Welcher Zusammenhang kann genutzt werden, um $\vec{J}$ bei vorgegebenen $\varrho\{\vec{r}, t\}$ zu berechnen?

Aufgabe 2.2.5

Eine Metallkugel vom Radius a ist umgeben von einer dielektrischen Hohlkugel. Der Innenradius der Hohlkugel ist $r = a$ und der Außenradius $r = b$. Die Dielektrizitätszahl ist ϵ_0, das Dielektrikum ist in radialer Richtung mit

$$P_r = P_0 \frac{a^2}{r^2}$$

polarisiert.

a) Berechnen Sie das elektrostatische Potential im gesamten Raum für den Fall, dass die Kugel geerdet ist.

b) Wie groß ist die Oberflächenladungsdichte auf der Metallkugel?

c) Wie groß ist die Gesamtladung der Kugel?

d) Wie ändert sich das Potential, wenn die Kugel ungeladen ist?

2.3 Stromdichte und Ladungsdichte

Aufgabe 2.3.1

Auf eine Grenzfläche zwischen zwei homogenen linearen Medien mit den Materialparametern ϵ und σ möge wie in Bild 2.1 dargestellt ein konstanter Strom der Dichte $\vec{J}_2$ unter dem Winkel θ_2 zur Flächennormalen einfallen.

a) Bestimmen Sie aus den an der Grenzfläche zu erfüllenden Randbedingungen den Winkel θ_1 des Stromflusses im Medium 1.

b) Geben Sie die Größe der sich einstellenden Grenzflächenladungsdichte an.

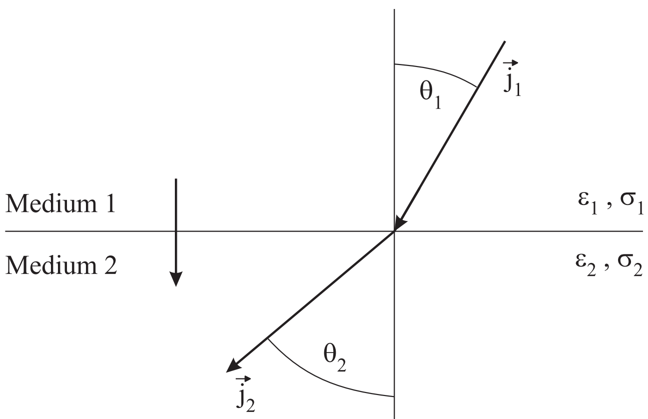

Abbildung 2.1: Stromfluss über eine Grenzfläche zweier Medien

Aufgabe 2.3.2

In einem unendlich ausgedehnten linearen Medium der Leitfähigkeit σ und der Dielektrizitätszahl $\epsilon\epsilon_0$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine homogene kugelförmige Ladungsverteilung freigesetzt:

$$\varrho\{\vec{r},0\} = \begin{cases} \varrho_0 > 0 & \text{für } |\vec{r}| \leq a \\ 0 & \text{für } |\vec{r}| > a \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $\varrho\{\vec{r},t\}$ für $t \geq 0$.

b) Berechnen Sie aus a) die Verschiebungsstromdichte $\vec{D}\{\vec{r},t\}$ und das elektrische Feld $\vec{E}\{\vec{r},t\}$, sowie die Stromdichte $\vec{J}\{\vec{r},t\}$. Die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Feldwirkung (Retardierung) wird hier vernachlässigt.

c) Berechnen Sie die elektrische Feldenergie für beliebige Punkte im gesamten Raum. Wie groß ist die Gesamtenergie der Anordnung ($r \to \infty$)?

d) Findet ein Energietransport statt? Verwenden Sie zur Berechnung den Poyntingvektor.

e) Berechnen Sie die bei quasistationärem Ladungsausgleich frei werdende Wärmeenergie. Vergleichen Sie mit der unter c) bestimmten Feldenergie.

Aufgabe 2.3.3

Aufgabe wie in der Klausur

In einem Halbleiter der Dicke d wurde die Dotierung so eingestellt, dass sich die Leitfähigkeit

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{x}{d}$$

ergibt. Auf der Oberseite bei $x = 0$ und der Unterseite bei $x = d$ werden Metallkontakte aufgebracht. Die Dielektrizitätszahl ε ist im gesamten Material homogen. Es darf angenommen werden, dass das Bauelement in y- und z-Richtung unendlich ausgedehnt ist.
Am oberen Kontakt wird die Stromdichte

$$j_0 \cdot \Theta\{t - t_0\} \cdot \vec{e}_\mathrm{x}$$

eingeprägt. Dabei stellt $\Theta\{t - t_0\}$ die Heaviside-(Sprung)Funktion dar.

Berechnen Sie das zeitabhängige elektrische Feld in der Struktur.

Hinweis: Es darf angenommen werden, dass sich das elektrische Feld in der Struktur im Verlauf der Zeit nicht plötzlich ändert.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung im Halbleiter? Geben Sie den Zusammenhang zwischen elektrischer Feldstärke und Stromdichte sowie zwischen Feldstärke und freier Raumladungsdichte an. Alternativ: Verwenden Sie den Weg zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung aus den Maxwell-Gleichungen. Welche Zusammenhänge bestehen zwischen $\vec{D}$ und $\vec{j}$ zu $\vec{E}$?

b) Welche Folgerung kann aus der resultierenden Differentialgleichung nach Einsetzen von $\vec{E}$ gezogen werden? Welche Differentialgleichung resultiert für $\vec{E}\{x, t\}$?

c) Bestimmen Sie die Lösung obiger DGL. Wie lauten die homogene und die partikuläre Lösung?

d) Wie lauten die Randbedingungen für das elektrische Feld für den Zeitraum $t < t_0$, zum Zeitpunkt $t = t_0$ und im Grenzfall $t \to \infty$?

2.4 Poisson- und Laplace-Gleichung und Kapazität

Aufgabe 2.4.1

Bestimmen Sie ein Skalarfeld V, das die Potenzialgleichung $\Delta V = 0$ erfüllt und

a) nur von der kartesischen Koordinate x abhängt. Der Laplaceoperator soll hier in kartesischen Koordinaten notiert sein.

b) nur von der Zylinderkoordinate ρ abhängt. Der Laplaceoperator soll hier in Zylinderkoordinaten notiert sein.

c) nur von der Kugelkoordinate r abhängt. Der Laplaceoperator soll hier in Kugelkoordinaten notiert sein.

Aufgabe 2.4.2

Aufgabe wie in der Klausur

Die in Abbildung 2.2 dargestellte idealisierte MOS-Struktur lässt sich mit folgendem, eindimensionalen Modell beschreiben: Auf eine ebene Metallelektrode mit dem Potenzial $V = U$, die in der Ebene $x = -d_1$ liegt, folgt im Bereich (1) $-d_1 \leq x \leq 0$ eine Isolatorschicht mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon_0\epsilon_1$. Daran schließt sich im Bereich (2) $0 \leq x \leq d_2$ eine Halbleiterschicht mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon_0\epsilon_2$ an, deren ebene Grenzfläche bei $x = d_2$ mit einem geerdeten Metallbelag versehen ist. In der Grenzfläche $x = 0$ zwischen Isolator und Halbleiter befindet sich eine Oberflächenladung mit der Flächenladungsdichte ϱ_{S0} . Im Halbleiter existiert eine Raumladung mit der ortsabhängigen Raumladungsdichte

$$\varrho_V = \varrho_0 \cdot \exp\left\{-\frac{x - d_2}{d_2}\right\} \quad .$$

Wie lautet der Potentialverlauf in der MOS-Struktur?

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet die Poissongleichung unter Berücksichtigung der Symmetrien in den beiden Bereichen?

b) Welche Stetigkeits- und Randbedingungen müssen erfüllt werden?

c) Wie lautet die Lösung der homogenen Differentialgleichung im Bereich (1)?

d) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung in Bereich (2).

e) Wie lautet der Potentialverlauf in der Gesamtstruktur unter Berücksichtigung der Stetigkeits- und Randbedingungen?

Aufgabe 2.4.3

Der in Abbildung 2.3 dargestellte halbe Ring mit dem Querschnitt eines auf der Spitze stehenden Quadrates der Diagonale $2d$ besteht aus einem homogenen Material der elektrischen

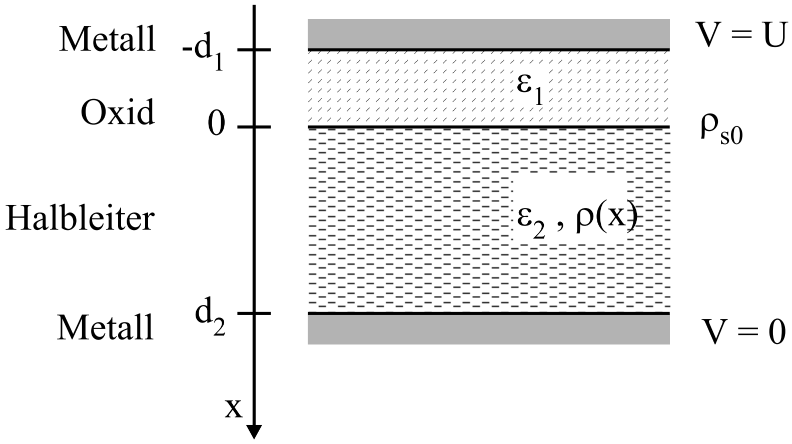

Abbildung 2.2: Idealisierte, eindimensionale MOS-Struktur

Leitfähigkeit σ. Seine Lage in einem Zylinderkoordinatensystem ist durch die Angaben

$$b \leq r \leq b + 2d, \qquad -z(r) \leq z \leq z(r), \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\text{mit} \qquad z(r) = \begin{cases} r - b & \text{für} \quad b \leq r \leq b + d, \\ b + 2d - r & \text{für} \quad b + d \leq r \leq b + 2d \end{cases}$$

gekennzeichnet. Die ebenen, quadratischen Grenzflächen bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ tragen einen Belag unendlich großer Leitfähigkeit und haben das elektrische Potential $V(\varphi = 0) = U$ bzw. $V(\varphi = \pi) = 0$.

a) Berechnen Sie den Potentialverlauf in dem halben Ring und geben Sie die Komponenten der elektrischen Feldstärke und Stromdichte an.

b) Wie groß ist der ohmsche Widerstand der Anordnung ?

Aufgabe 2.4.4

In einem hohlkugelförmigen Raumbereich mit $a \leq r \leq b$ existiert eine ortsabhängige Raumladung der Dichte $\varrho_V = \varrho_0 \cos\{\vartheta\}$. Der gesamte übrige Raum ist ladungsfrei, er hat die Dielektrizitätszahl ϵ_0. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke für Aufpunkte auf der $z-$ Achse innerhalb und außerhalb der Kugel.

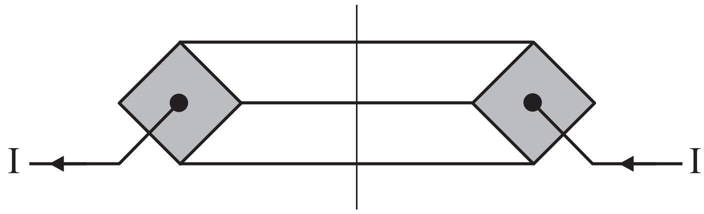

Abbildung 2.3: Leitfähiger Halbring mit Stromzuführung über die metallisierten Schnittflächen.

Aufgabe 2.4.5

Aufgabe wie in der Klausur

Ein unendlich langer metallischer Hohlzylinder mit Innenradius a und Außenradius b ist wie in Abbildung 2.4 gezeichnet in ein Dielektrikum der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_2 = \varepsilon_r \varepsilon_0$ mit der Raumladungsdichte $\varrho_2 = \varrho_0$ eingebettet. Der Metallzylinder ist mit einem Gas der Dielektrizitätszahl $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ und der Ladungsdichte $\varrho_1 = \varrho_0 \frac{\rho}{a}$ gefüllt, und liegt auf dem Potential $V = U$. Die zylindrische Außenhaut des Dielektrikums ist mit einem geerdeten Metallbelag versehen.

Nehmen Sie an, dass die z-Achse und die Zylinderachse zusammenfallen. Wie lautet dann der Potentialverlauf im gesamtem Raum $0 \leq \rho \leq c$?

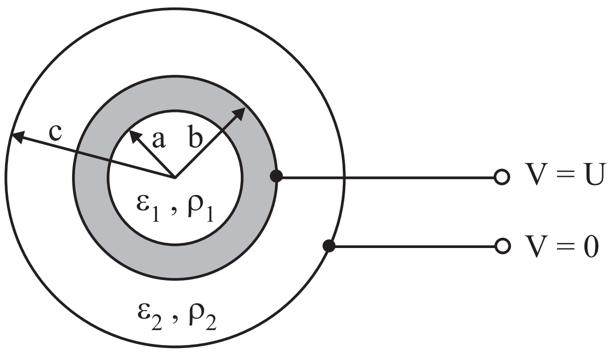

Abbildung 2.4: Querschnitt durch die Leiteranordnung. Die Zylinderachse verläuft senkrecht zur Zeichenebene.

Zusatzfragen für die Übung

a) Welche Symmetrien können in dieser Aufgabe verwendet werden?

b) Wie lautet das Gaußsche Gesetz in differentieller Form unter Berücksichtigung obiger Symmetrien?

c) Welche Randbedingungen können verwendet werden?

d) Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen in der Anordnung?

e) Wie lautet die dielektrische Verschiebung für Punkte innerhalb des Hohlzylinders? Welche Größe hat das zugehörige Potential unter Berücksichtigung der Randbedingungen?

f) Wie lautet die dielektrische Verschiebung für Punkte außerhalb des Hohlzylinders? Welche Größe hat das zugehörige Potential unter Berücksichtigung der Stetigkeits- und Randbedingungen?

2.5 Widerstände und Kondensatoren

Aufgabe 2.5.1

Ein geladener kreisscheibenförmiger Kondensator mit Radius r ist mit einer Porzellanscheibe der Dicke d und der relativen Dielektrizitätszahl ϵ gefüllt. Die Spannung am Kondensator ist U.

a) Welche Ladung bzw. Ladungsdichte befindet sich auf den Kondensatorplatten?

Eine Platte des Kondensators wird um L nach außen gezogen.

b) Welche Spannungs- und Feldänderung resultiert daraus ?

Vernachlässigen Sie Randfelder und nehmen Sie ideale Leiter für die Platten an.

Aufgabe 2.5.2

Für den Widerstand zwischen zwei Elektroden gilt der Zusammenhang

$$R = (V_1 - V_2)/I \quad .$$

Die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ hängt in isotropen Medien gemäß

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

von der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und der Leitfähigkeit σ ab (differentielles Ohmsches Gesetz).

a) Drücken Sie die Spannungsdifferenz und den Gesamtstrom I durch geeignete Integrale aus, die die elektrische Feldstärke enthalten.

Die Kapazität einer Anordnung von zwei Elektroden ist gemäß

$$C = Q/(V_1 - V_2)$$

definiert, wobei Q die Ladung ist, die auf einer der Elektroden durch die Potentialdifferenz entsteht.

b) Geben Sie auch hier jeweils ein Integral zur Berechnung von Q und $V_1 - V_2$ an.

Zwischen zwei Elektroden sei zunächst ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon\epsilon_0$ angeordnet. Anschließend befinde sich ein leitfähiges Material mit der Leitfähigkeit σ zwischen den Elektroden.

c) Geben Sie das Produkt RC für den Fall an, dass beide Materialkonstanten keine Ortsabhängigkeit aufweisen.

d) Berechnen Sie die Kapazität eines Kugelkondensators mit dem Radius r_1 der Innenelektrode und r_2 der Außenelektrode, der ein Dielektrikum mit der Dielektrizitätszahl $\epsilon\epsilon_0$ enthält.

Der Zwischenraum werde durch ein Material der Leitfähigkeit σ ersetzt.

e) Wie groß ist der Widerstand zwischen den Elektroden?

Kapitel 3

Grundlegende Gesetze der Magnetostatik

3.1 Magnetfelder von Strömen

Aufgabe 3.1.1

Aufgabe wie in der Klausur

In einem Zylinder mit $0 \leq \rho \leq a$ und $-\infty \leq z \leq \infty$ fließt in axialer Richtung ein Strom J der Stromdichte $\vec{j} = j_0 \frac{a}{\rho} \sin\left\{\frac{\pi\rho}{a}\right\} \cdot \vec{e}_z$. Durch einen unendlich langen, koaxialen Zylindermantel aus leitendem Material vom Innenradius $b > a$ fließt derselbe Strom in entgegengesetzter Richtung. Gesucht ist die magnetische Induktion im gesamten Raum.

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet das allgemeine Durchflutungsgesetz in integraler Darstellung?

c) Ersetzen Sie die Konstante j_0 in der Stromdichte durch einen Ausdruck mit dem Gesamtstrom J.

d) Welche Symmetrien können hier zur Lösung verwendet werden? Wie sollten deshalb das Flächen- und das Linienelement im Durchflutungsgesetz gewählt werden?

e) Wie kann das Wegintegral für ein Kreissegment, das zwischen den Radien ρ_1 und ρ_2

sowie den Winkeln ϕ_1 und ϕ_2 liegt, aufgespalten werden?

f) Was resultiert für $\vec{B}$ nach Auswertung des **Wegintegrals** $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 2\pi$, $\rho_1 = 0$ und $\rho_2 = \rho$ im gesamten Bereich $0 \leq \rho \leq b$?

g) Welches Ergebnis findet man nach der Auswertung des **Oberflächenintegrals** nach der Auswertung im gesamten Bereich $0 \leq \rho \leq b$ für $\vec{B}$?

Aufgabe 3.1.2

Eine einlagige, gerade Spule mit kreisförmigen Querschnitt (Querschnittsradius a) nach Abbildung 3.1 besteht aus N Windungen eines sehr dünnen Drahtes, die in Form einer Schraubenlinie gewickelt sind. Die Länge der Spule ist l. Die Achse der Spule möge mit der z-Achse eines gewählten Koordinatensystems zusammenfallen. Die Spule wird von einem Strom der Stromstärke I durchflossen.

a) Berechnen Sie die z-Komponente der magnetischen Flussdichte für Aufpunkte auf der z-Achse.

b) Wie groß ist die z-Komponente der magnetischen Flussdichte im Mittelpunkt der Spule bei $z' = 0$?

Aufgabe 3.1.3

Aufgabe wie in der Klausur

Als Modell für eine Spule mit dickem Wicklungspaket soll ein leitender Zylinder dienen. Der Zylinder hat einen Innenradius a und einem Außenradius b und ist wie in Abbildung 3.2 angeordnet. Er erstreckt sich von $z = -l/2$ bis $z = +l/2$. Innerhalb des Zylinders besteht eine konstante Stromdichte in ϕ-Richtung mit der Größe j_ϕ . Die magnetische Induktion soll ausgehend von der integralen Schreibweise des Biot-Savartschen Gesetzes berechnet werden.

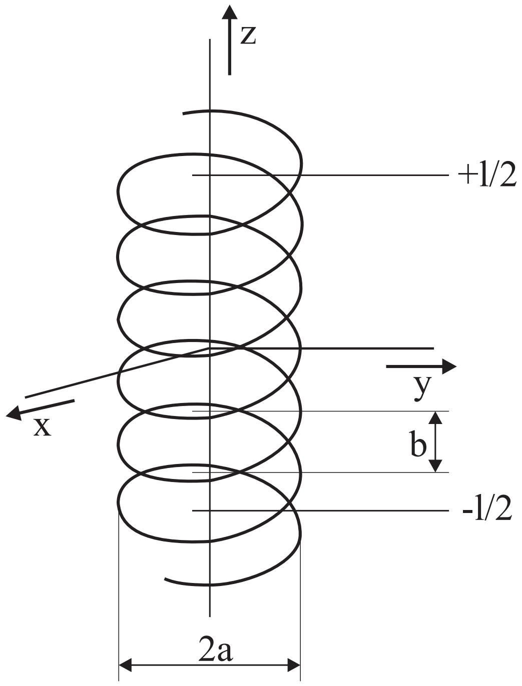

Abbildung 3.1: Zylindrische Spule mit dünner Wicklung und kreisförmigen Querschnitt

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie groß ist der Strom um die z-Achse?

b) Von welchen Koordinaten ist die Anordnung unabhängig?

c) Berechnen Sie die magnetische Flussdichte auf der z-Achse!

d) Wie groß ist $\vec{B}$ in der Zylindermitte?

e) Wie groß ist $\vec{B}$ in der Spulenmitte für den Fall eines dünnen Wicklungspakets $b = \lim_{\epsilon \to 0}(a + \epsilon)$ bei $J = \mathrm{const.}$?

f) Wie vereinfacht sich der Ausdruck aus d) für den Fall eines sehr langen Zylinders $(l \gg a)$?

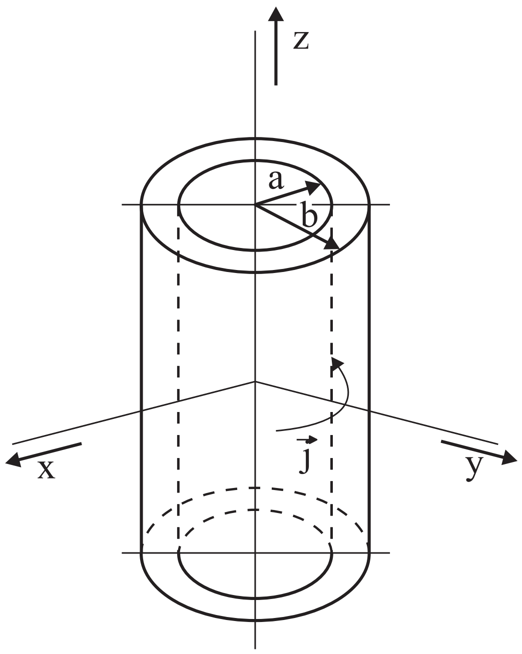

Abbildung 3.2: Modell einer zylindrischen Spule mit dickem Wicklungspaket und kreisförmigem Querschnitt.

Aufgabe 3.1.4

Aufgabe wie in der Klausur

Ein hohler leitender Stab hat einen inneren Radius r_1 und den Außenradius r_2. Die Stromdichte im gesamten Stab sei konstant. Berechnen Sie den Gesamtstrom J durch den Stab und die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ im gesamten Raum.

Aufgabe 3.1.5

Aufgabe wie in der Klausur

Längs der z-Achse eines kartesischen Koordinatensystems liegt im Bereich $-l \leq z \leq l$ ein linearer Leiter (Stromfaden) der Länge $2l$, der in positiver z-Richtung von einem Strom der Stromstärke I durchflossen wird.

Wie lautet das magnetische Vektorpotenzial und die magnetische Induktion im gesamten Raum allgemein und für den Sonderfall eines sehr langen Drahtes?

Zusatzfragen für die Übung

a) Errechnen Sie das von diesem Strom im gesamten Raum verursachte Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r})$ und daraus die Komponenten des magnetischen Induktionsfeldes $\vec{B}(\vec{r})$ ($\mu = \mu_0$ im ganzen Raum).

b) Berechnen Sie $\vec{B}$ zum Vergleich direkt über das Biot-Savart-Gesetz.

c) Was erhält man für alle Größen im Grenzfall sehr großer Länge ℓ bzw. für $\lim \ell \to \infty$?

Aufgabe 3.1.6

Ein zylindersymmetrisches Magnetfeld wird durch zylindersymmetrische Ströme erzeugt, die keine Komponente in Richtung der Achse haben. Geben Sie einen (nicht notwendigerweise geschlossenen) Ausdruck für das Vektorpotential $\vec{A}$ und die magnetische Induktion

$\vec{B}$ auf der Symmetrieachse außerhalb der erzeugenden Quellen unter der Voraussetzung an, dass dort keine Singularitäten vorhanden sind. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann die $z-$ Achse als Symmetrieachse und $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (statische Felder) gewählt werden.

Aufgabe 3.1.7

Aufgabe wie in der Klausur

Eine elektrische Leitung besteht aus einem kreiszylindrischen Innenleiter mit Radius a (Querschnitt S_i) und einem sehr dünnen koaxialen Hohlzylinder vom Innendurchmesser $2b > 2a$ und Außendurchmesser $2c > 2b$ (Querschnitt S_a). Auf den beiden Zylindern fließen entgegengesetzt gleich große Ströme $\pm J$. Die Leitfähigkeit des Zylindermaterials ist σ. Die Achsen der Zylinder sind mit der z-Achse eines Koordinatensystems identisch. Im Ursprung des Koordinatensystems wird die Spannung U zwischen Innen- und Außenleiter gemessen. Gesucht ist die magnetische Feldstärke im gesamten Raum.

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung im Quer- und Längsschnitt (x-y- und x-z-Ebene).

b) Welche Stromdichte herrscht jeweils im Innen- und Außenleiter?

c) Wie lautet die Integralform des Ampere'schen Gesetzes?

d) Was folgt für $\vec{H}$ im gesamten Raum?

Aufgabe 3.1.8

Aufgabe wie in der Klausur

Ein unendlich langes, gerades, sehr dünnes Leiterband der Breite $2a$ liege längs des Streifens

$$-a \leq x \leq a, \qquad y = 0, \qquad -\infty \leq z \leq \infty.$$

In diesem Leiterband fließe ein Strom der Stromstärke J in positiver z-Richtung. Die magnetische Flussdichte soll allgemein sowie näherungsweise in der Nähe des Ursprungs und weit entfernt vom Band bestimmt werden.

Hinweise zur Lösung:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \tag{B206}$$

$$\int \frac{1}{a^2 \pm x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\begin{cases} \arctan\left\{\frac{x}{a}\right\} & \text{für Vorzeichen „+“} \\ \mathrm{A}rtanh\left\{\frac{x}{a}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{a+x}{a-x}\right\} & \text{für Vorzeichen „-“und } |x| < a \\ \mathrm{A}rcoth\left\{\frac{x}{a}\right\} = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{x+a}{x-a}\right\} & \text{für Vorzeichen „-“und } |x| > a \end{cases} \tag{B57}$$

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung mit einem beispielhaften Quellpunkt $\vec{r'}$ und Aufpunkt $\vec{r}$.

b) Wie lautet die magnetische Flussdichte am Punkt $\vec{r}$ in allgemeiner integraler Darstellung?

c) Wie lautet die Darstellung der Stromdichteverteilung $\vec{j}_\mathrm{v}$ unter der Voraussetzung einer homogenen Stromdichte j_0 im Leiterband? Welche Größe hat j_0?

d) Wie lautet $\vec{r} - \vec{r'}$ in kartesischen Koordinaten?

e) Werten Sie das Kreuzprodukt im Zähler des Integranden aus.

f) Führen Sie die Integration zunächst über y', dann über z' aus.

g) Wie groß ist die Komponente B_x von $\vec{B}$ nach Auswertung des Integrals?

h) Wie groß ist die Komponente B_y?

i) Wie groß ist die Komponente B_z?

Grenzfälle:

k) Es sollen Aufpunkte nahe dem Ursprung untersucht werden, also für Punkte $\rho^2 = x^2 + y^2 \ll a^2$. Drücken Sie $\vec{B}$ mit Zylinderparametern (ρ, ϕ, z) aus. Welche Näherungen können für B_x und B_y angegeben werden?

l) Für Aufpunkte weit entfernt vom Streifen ($\rho^2 \gg a^2$) ist $\vec{B}$ zu berechnen. Wie vereinfachen sich die Komponenten B_x und B_y? Welche andere Stromverteilung hat das gleiche Magnetfeld?

3.2 Kräfte magnetischer Felder

Aufgabe 3.2.1

In einem supraleitenden Magneten wird die Flussdichte $\vec{B}$ erzeugt. Der Strom durch die Windungen des Magneten ist I. Welche Kraft pro Längeneinheit wirkt auf die einzelnen Drähte? Nehmen Sie an, dass $\vec{B}$ auch im Wicklungspaket des Magneten vorherrscht. Die Wicklungsrichtung kann orthogonal zum erzeugten Magnetfeld angenommen werden.

Aufgabe 3.2.2

Ein Flugzeug fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 500$ km/h genau in Richtung zum magnetischen Nordpol. Das vertikale Magnetfeld beträgt $B = 5 \cdot 10^{-5}$ T.

a) Welche elektrische Feldstärke wird an Bord des Flugzeugs messbar?

b) Welche Spannung herrscht zwischen den Flügelspitzen bei der Spannweite $D = 50$ m?

Aufgabe 3.2.3

Die magnetische Kraft auf das schraffiert gezeichnete Leiterstück der Anordnung im untenstehender Abbildung 3.3 soll berechnet werden. Die Querschnittsdimensionen des Leiters seien vernachlässigbar.

a) Wie lautet die Lorentzkraft?

b) Wie lautet die Stromdichte in den einzelnen Leiterstücken?

c) Welche magnetische Flussdichte wird von den Leiterstücken im schraffierten Bereich erzeugt?

d) Welche Gesamtkraft wirkt auf den schraffierten Bereich?

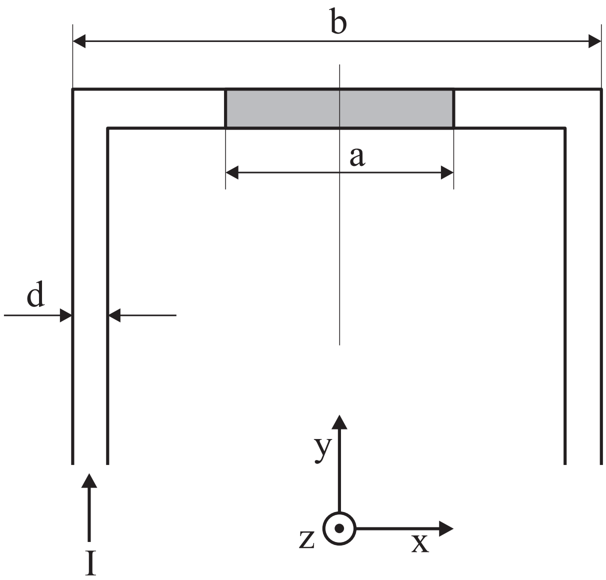

Abbildung 3.3: Anordnung einer unendlich ausgedehnten Leiterschleife. Die Kraft auf das schraffierte Leiterstück ist unter der Voraussetzung $d \ll b$ gesucht.

Aufgabe 3.2.4

Aufgabe wie in der Klausur

Im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befindet sich in der Ebene $z = 0$ eine vom Strom I_1 durchflossene kreisförmige Leiterschleife vom Radius a. Entlang der Geraden $(y, z) = (-b, 0)$ mit $b > a$ liegt ein unendlich langer linearer Leiter, der seinerseits den Strom I_2 trägt. Der Strom I_1 an der Stelle $y = -a$ ist mit I_2 gleichgerichtet. Die Permeabilität ist $\mu = \mu_0$ im ganzen Raum. Wie groß ist die Kraft $\vec{F}$, die auf den geraden Leiter wirkt?

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet die Lorentzkraft in allgemeiner Darstellung?

c) Welche Größe hat das Magnetfeld des geraden Leiters in der Ebene $z = 0$?

d) Wie lautet die Stromdichte $\vec{j}$ im kreisförmigen Leiter?

e) Welche Kraft wirkt auf den kreisförmigen Leiter?

f) Wie groß ist die Kraft $\vec{F}$, die auf den geraden Leiter wirkt?

Aufgabe 3.2.5

Das Barlow'sche Rad besteht aus einer kreisrunden Scheibe, die zum einen an der Achse und zum anderen an einem Punkt am Rand einen elektrischen Anschluss besitzt. Die Anschlüsse sind so ausgelegt, dass sie eine Drehbewegung möglichst wenig hemmen (zum Beispiel über die Achslagerung und einen Flüssigkeitskontakt (Quecksilber) am Rand). Unter dem Einfluss eines homogenen Magnetfeldes $\vec{B}$ parallel zur Achse wirkt bei Stromfluss I durch die Kontakte ein Drehmoment auf die Scheibe. Berechnen Sie die Größe des Drehmoments.

Aufgabe 3.2.6

Aufgabe wie in der Klausur

In der x-y-Ebene ist eine elliptische Leiterschleife angeordnet, wobei die Halbachsen in Koordinatenrichtung weisen. Die Länge der Halbachsen betragen a in x-Richtung und b in y-Richtung. Die Leiterschleife werde in mathematisch positiver Drehrichtung vom Strom I durchflossen und befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}}$. Welches Drehmoment wirkt auf die Schleife?

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung in der x-y-Ebene.

b) Parametrisieren Sie den Ortsvektor für Punkte auf der Leiterschleife.

c) Wie lautet der Ausdruck für die Lorentzkraft auf ein Leiterstück der Länge $\mathrm{d}\vec{\ell}$?

d) Wie lautet der Ausdruck für das Drehmoment um den Schwerpunkt der Leiterschleife, das vom Stück $d\vec{\ell}$ herrührt?

e) Wie lautet der Integralausdruck für das Drehmoment der gesamten Leiterschleife?

f) Werten Sie das Kreuzprodukt im Integranden aus und bestimmen Sie komponentenweise das Drehmoment.

Kapitel 4

Magnetostatik

4.1 Magnetisches Vektorpotenzial

Aufgabe 4.1.1

Eine Helmholtzspule besteht aus zwei ebenen kreisförmigen Spulen mit derselben Spulenachse. Sie wird z.B. zur Bestimmung des Verhältnisses von Ladung zu Masse geladener Teilchen (z.B. Elektron: e/m- Versuch) verwendet. Der Abstand der Spulen betrage L, ihr Radius R. Die Spulen haben beide N Windungen und werden gleichsinnig vom Strom I durchflossen. Welche Flussdichte $\vec{B}$ entsteht auf der Achse und genau in der Mitte der Helmholtzspule? Nehmen Sie an, dass der Durchmesser des Spulendrahtes vernachlässigbar ist!

Aufgabe 4.1.2

Aufgabe wie in der Klausur

Ein sehr langes, gerades Koaxialkabel (Innenleiter: Radius R_1; Außenleiter: Innenradius R_2, Außenradius R_3) wird von dem stationären Strom J durchflossen. Der Stromfluss ist in den beiden Leitern entgegengesetzt zueinander. Die Leitfähigkeit im Innen- und Außenleiter ist σ_0. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im gesamten Raum. Zur Berechnung soll die

$z-$ Achse des Zylinderkoordinatensystems im Zentrum des Innenleiters liegen.

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

Die Stromdichten im Innen- und Außenleiter sind gegeben durch $\vec{j}_e = j_e \cdot \vec{e}_z$ und $\vec{j}_a = -j_a \cdot \vec{e}_z$.

b) Berechnen Sie j_e und j_a unter der Voraussetzung, dass die Stromdichte in beiden Leitern homogen ist.

c) Berechnen Sie das magnetische Vektorpotenzial $\vec{A}$ der einzelnen Teilbereiche aus der Poissongleichung für $\vec{A}$.

d) Wie lauten die Randbedingungen für $\vec{B}$ und $\vec{A}$ an den einzelnen Grenzflächen?

e) Wie lautet das Vektorpotenzial $\vec{A}$ im gesamten Raum?

f) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke im gesamten Raum.

Aufgabe 4.1.3

Aufgabe wie in der Klausur

Zwei parallele, in z-Richtung unendlich ausgedehnte Leiter werden von einem Strom I als Hin- und Rückleiter durchflossen. Der in positive z-Richtung fließende Strom ist bei $x = \frac{d}{2}$, der andere bei $x = -\frac{d}{2}$. Die Querschnittsabmessungen der Leiter sind vernachlässigbar klein. Wie groß ist das magnetische Vektorpotenzial $\vec{A}$ und die magnetische Flussdichte $\vec{B}$?

Hinweise zur Lösung:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{A}rsinh\left\{\frac{x}{a}\right\} + C_1 = \ln\left\{x + \sqrt{x^2+a^2}\right\} + C_2 \qquad (B192)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}^3}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (B206)$$

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet der Zusammenhang von elektrischer Stromdichte und magnetischem Vektorpotential in integraler Schreibweise?

c) Parametrisieren Sie die elektrische Stromdichte.

d) Wie lautet die Stammfunktion für $\vec{A}$? (Setzen Sie die Integrationsgrenzen für z' noch nicht ein!)

e) Welchen Wert nimmt die Stammfunktion für $z' = -\infty$ an?

f) Welchen Wert nimmt die Stammfunktion für $z' = \infty$ an? Wie lautet damit das Ergebnis?

g) Berechnen Sie $\vec{B}$ aus $\vec{A}$.

Alternativen zur Berechnung von $\vec{B}$ (gehört nicht zur Aufgabe):

Berechnung der magnetischen Flussdichte über Biot Savart

h) Berechnen Sie $\vec{B}$ im gesamten Raum mit Hilfe des Biot-Savart- Gesetzes.

Direkte Überlagerung der magnetischen Induktion zweier Stromfäden

i) Wie lautet die magnetische Induktion eines Stromfadens, wenn man Zylinderkoordinaten benutzt? Wie lautet die Darstellung in kartesischen Koordinaten? Wie lautet die Überlagerung?

Aufgabe 4.1.4

Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ eines geraden Stromfadens der Länge L, durch den der Strom I fließt.

4.2 Magnetfelder begrenzter Stromverteilungen

Aufgabe 4.2.1

Berechnen Sie die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ eines sehr langen geraden Leiters, durch den der Strom I fließt. Der Leiter wird jetzt zu einer Schleife mit dem Radius R gebogen.

a) Wie groß ist die Flussdichte im Zentrum der Schleife?

b) Wie groß ist B an einem beliebigen Ort in der Ebene der Schleife?

Aufgabe 4.2.2

Auf einer Leiterplatte fließt der Strom I. Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ in integraler Schreibweise ist für den Fall gesucht, dass der Strom bei $z = 0$ in der x-y-Ebene im Kreis mit Radius R fließt.

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt der Leiterschleife. Die Kreisachse ist parallel zur z-Richtung.

b) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}$ in Zylinderkoordinaten an. Verwenden Sie Einheitsvektoren des Aufpunktes und zylindrische Parameter.

c) Werten Sie das Integral für $\vec{A}$ bis auf die φ'-Komponente aus. Wie hängt $\vec{A}$ von der Azimutalkomponente φ ab?

Das Vektorpotential kann bei quadratischer Stromführung (Seitenlänge a) geschlossen angegeben werden.

d) Skizzieren Sie die neue Anordnung. Auch hier liege der Koordinatenursprung in der Mitte. Die Kanten des Quadrates sind parallel zur x- und y-Achse.

e) Geben Sie die Stromdichte an.

f) Wie lautet die Lösung für $\vec{A}$?

g) Zur abkürzenden Schreibweise können die Vektoren vom Aufpunkt in die Eckpunkte des Quadrats herangezogen werden. Welche Beträge r_1 bis r_4 haben die Vektoren? Wie lautet $\vec{A}$ mit diesen Werten?

h) Zur Berechnung von $\vec{B}$ werden die Ableitungen von r_1 bis r_4 nach x, y und z benötigt. Wie lauten die Ableitungen?

i) Wie lautet $\vec{B}$? Wie groß ist $\vec{B}$ auf der z-Achse?

Aufgabe 4.2.3

Am magnetischen Nordpol der Erde verläuft das Magnetfeld vertikal und hat die Stärke $B(= 6.2 \cdot 10^{-5}$ T). An der Erdoberfläche und außerhalb der Erde gleicht das Magnetfeld annähernd dem Magnetfeld eines Dipols im Erdmittelpunkt.

a) Wie groß ist das magnetische Dipolmoment (Erddurchmesser $d(= 14000\,\mathsf{km})$?

b) Welche Stärke müsste ein um den Äquator fließender Strom haben, damit er ein Dipolmoment gleicher Größe erzeugte?

Aufgabe 4.2.4

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius R ist die Ladung Q gleichmäßig verteilt. Die Kugel rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω . Bestimmen Sie die magnetische Induktion innerhalb der Kugel auf der Rotationsachse.

Aufgabe 4.2.5

Im freien Raum ist wie in Abbildung 4.1 eine geschlossene Leiterschleife längs einer Kurve C angeordnet. Dieser Stromfaden wird von einem Strom der Stärke I durchflossen.

a) Geben Sie einen Ausdruck für das magnetische Dipolmoment der Anordnung an. Machen Sie dabei den Übergang von einer räumlichen Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r})$ zu einem gerichteten Strom der Stärke I .

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Lösung aus Aufgabenteil a) den Betrag des magnetischen Dipolmoments.

c) Die Stromdichte werde nunmehr durch N bewegte Punktladungen der Größe q_i am Ort $\vec{r_i}(t)$ hervorgerufen, wobei die Ladungen die Geschwindigkeit $\vec{v_i}$ besitzen. Geben Sie für diesen Fall einen Ausdruck für das magnetische Dipolmoment an. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem Drehimpuls $\vec{L_i} = m_i \cdot \vec{r_i} \times \vec{v_i}$ eines Teilchens.

d) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus c) das magnetische Moment eines Elektrons, welches sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r_0 um ein Proton bewegt (Bohrsches Magneton).

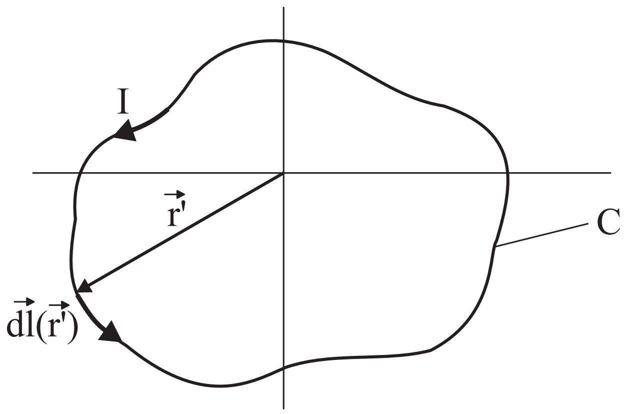

Abbildung 4.1: Geschlossener elektrischer Stromfaden, der von einem Strom der Stärke I durchflossen wird

Aufgabe 4.2.6

In der $y-z-$ Ebene befindet sich eine Leiterschleife mit dem Radius r und Widerstand R. Ihr Mittelpunkt liegt im Ursprung des Koordinatensystems. Im Punkt $(d,0,0)^T$ ist ein magnetischer Punktdipol mit konstantem Dipolmoment $\vec{m} = (m,0,0)^T$. Gesucht ist der Strom im Kreisring, wenn der Dipol mit konstanter Geschwindigkeit v auf der $x-$ Achse in Richtung der Leiterschleife bewegt wird.
Nehmen Sie zur Lösung dieser Aufgabe an, dass die Bewegung so langsam verläuft, dass das Magnetfeld durch das Feld eines statischen Dipols angenähert werden kann. Die Bewegung beginnt zum Zeitpunkt $t=0$.
Zur Berechnung des Stroms wird die induzierte Spannung im Ring benötigt. Diese folgt aus dem elektrischen Feld im Ring, welches aus dem magnetischen Vektorpotenzial resultiert.

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Der Ursprung des Koordinatensystems liege im Mittelpunkt des Ringes.

b) Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\vec{E}$ und $\vec{A}$? Statische elektrische Potentiale werden nicht berücksichtigt.

c) Wie lautet das magnetische Vektorpotenzial des Dipols am Ort der Leiterschleife?

d) Wie lautet die Zeitabhängigkeit des Vektors $\vec{r'}$ zum Dipol?

e) Berechnen Sie die induzierte Spannung U und den daraus im Ring fließenden Strom I.

Wird der Ring auf den ruhenden Dipol zu bewegt, fließt der gleiche Strom wie vorher. Zur Berechnung eignet sich hier die Lorentzkraft.

f) Wie lautet die Lorentzkraft auf einen Ladungsträger im Draht? Beachten Sie, dass kein äußeres elektrisches Feld herrschen soll.

g) Die auf die Ladungsträger wirkende Kraft treibt den Strom durch den Ring. Welche Größe hat die dazu gehörende äquivalente elektrische Feldstärke $\vec{E}_L$?

h) Welche Größe hat die magnetische Induktion $\vec{B}$, die die Lorentzkraft im Ring hervorruft? Was resultierte daraus für $\vec{E}_L$?

i) Berechnen Sie die induzierte Spannung im Ring und den daraus resultierenden Strom.

4.3 Magnetisierbare Materie

Aufgabe 4.3.1

Eine Kugel vom Radius R ist gleichförmig in $x-$ Richtung magnetisiert. Die Magnetisierungsdichte ist M_0.

a) Berechnen Sie das magnetische Vektorpotential im gesamten Raum.

b) Welche Größe haben die magnetische Feldstärke H und die Induktion B im gesamten Raum?

c) Vergleichen Sie die Richtungen von $\vec{B}$ und $\vec{H}$. Welcher Unterschied existiert zur Lösung für $\vec{E}$ und $\vec{D}$ der homogen polarisierten Kugel?

4.5 Randwertprobleme der Magnetostatik

Aufgabe 4.5.1

Berechnen Sie mit Hilfe des Poisson-Integrals das magnetische Potential $\phi_m\left(\vec{r}\right)$ einer Kugel im freien Raum, die eine homogene Magnetisierung in z-Richtung trägt (Abbildung 4.2), für Punkte außerhalb der Kugel. Die Magnetisierung wird durch $\vec{M} = M_0 \cdot (0 \ \ , 0 \ \ , 1)^T$ beschrieben.

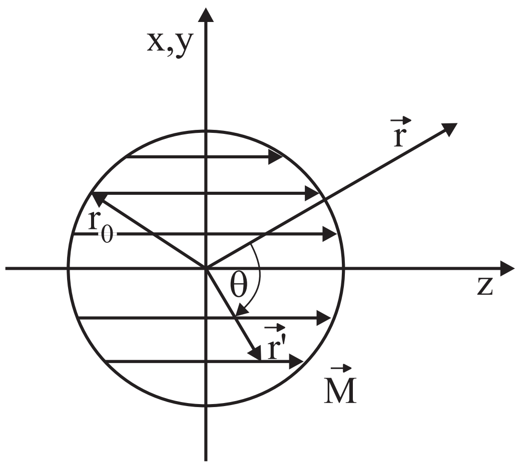

Abbildung 4.2: Homogen magnetisierte Kugel im freien Raum

Kapitel 5

Spezielle Lösungsmethoden

5.1 Lösungsmethoden für die Laplacegleichung mit Orthogonalentwicklung

Aufgabe 5.1.1

Ein in y-Richtung unendlich langer, geerdeter Hohlleiter mit rechteckförmigem Querschnitt schließt wie unten dargestellt das Volumen

$$0 \leq x \leq a$$
$$-\infty \leq y \leq \infty$$
$$-b \leq z \leq b$$

ein. Im Bereich $-b \leq z < 0$ hat das eingeschlossene Medium die Dielektrizitätszahl $\epsilon_0\epsilon_2$, im Bereich $0 < z \leq b$ gilt $\epsilon_0\epsilon_1$. In der Trennfläche $z = 0$, $0 < x < a$ befindet sich eine in der y-Richtung unendlich ausgedehnte und unendlich dünne Folie mit der konstanten Flächenladungsdichte ϱ_S.

a) Wie wirkt sich die unendliche Ausdehnung in y-Richtung aus?

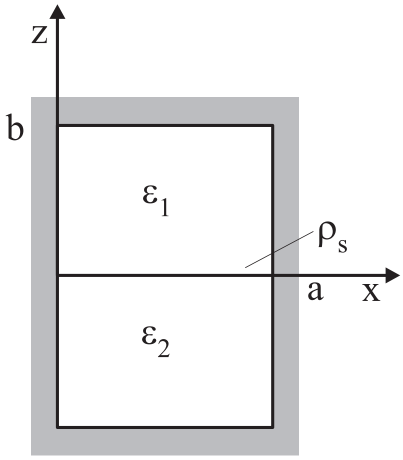

Abbildung 5.1: Rechteckhohlleiter mit Flächenladung ϱ_S in der Ebene $z = 0$

b) Wie lautet der Ansatz für das Potential V_1 im Bereich 1 ($z \geq 0$)? Verwenden Sie einen Ansatz, der möglichst viele Randbedingungen bereits erfüllt.

c) Wie lautet der entsprechende Ansatz für das Potential V_2 im Bereich 2 ($z \leq 0$)?

d) Wie lauten die Randbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ bei $z = 0$?

e) Wie lautet das Potential im gesamten Hohlleiter?

f) Welche Größe hat die Oberflächenladung auf der Wandfläche bei $z = b$?

Aufgabe 5.1.2

Auf der Oberfläche des durch

$$0 \leq R \leq a \qquad \text{und}$$
$$-l \leq z \leq l$$

definierten kreiszylindrischen Volumens sei die folgende Potenzialverteilung vorgegeben:

$$V = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm l \quad \text{und} \quad 0 \leq R \leq a$$

$$V = V_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \quad \text{für} \quad -l \leq z \leq l \quad \text{und} \quad R = a \quad .$$

Zur Berechnung des elektrostatischen Potentials innerhalb des oben definierten Volumens geht man von der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten aus! Dabei ist es praktisch, Funktionen mit komplexen Argumenten zu zuzulassen.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet der allgemeine Ansatz für das Potential im Zylinder?

c) Berechnen Sie die Koeffizienten im Potenzialansatz mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen. Beginnen Sie mit der Umfangskomponente.

d) Wie lautet das Potential im gesamten Zylinder?

Aufgabe 5.1.3

Auf der Oberfläche des durch

$$\begin{aligned} 0 \leq\ & R \leq a \qquad \text{und} \\ -l \leq\ & z\ \leq l \end{aligned}$$

definierten kreiszylindrischen Volumens sei die folgende Potenzialverteilung vorgegeben:

$$\begin{aligned} &V = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm l \quad \text{und} \quad 0 \leq R \leq a \\ &V = V_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \quad \text{für} \quad -l \leq z \leq l \quad \text{und} \quad R = a \quad . \end{aligned}$$

Zur Berechnung des elektrostatischen Potentials innerhalb des oben definierten Volumens geht man von der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten aus! Dabei ist es praktisch, Funktionen mit komplexen Argumenten zu zuzulassen.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet der allgemeine Ansatz für das Potential im Zylinder?

c) Berechnen Sie die Koeffizienten im Potenzialansatz mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen. Beginnen Sie mit der Umfangskomponente.

d) Wie lautet das Potential im gesamten Zylinder?

Aufgabe 5.1.4

In ein ursprünglich homogenes Feld $\vec{E} = (E_0, 0, 0)^T$ wird ein Kreiszylinder vom Radius R mit der relativen Dielektrizitätszahl ε eingebettet. Die Achse des Zylinders weist in $z-$Richtung. Bestimmen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

Aufgabe 5.1.5

Im freien Raum ist eine kugelförmige Flächenladung mit dem Radius $r = r_0$ angebracht.

a) Berechnen Sie das Potential der Ladung im gesamten Raum für den Fall, dass die Flächenladung durch eine Punktladung Q am Ort $(r_0, \theta_0, \varphi_0)_{\mathrm{K}}$ gegeben ist! Verwenden Sie den Potenzialansatz mit Kugelflächenfunktionen!

b) Wie lautet die Greensche Funktion des freien Raums in Kugelkoordinatendarstellung?

c) Wie kann das Potential bei beliebiger Ladungsverteilung im freien Raum mit der Greenschen Funktion aus Teil b) angegeben werden?

d) Ermitteln Sie aus dem Vergleich der Greenschen Funktion in Kugelkoordinaten und kartesischen Koordinaten die Darstellung für $|\vec{r} - \vec{r'}|^{-1}$ nach Kugelflächenfunktionen!

Aufgabe 5.1.6

In einem Kupferleiter befindet sich ein Lunker, der klein gegen die Abmessungen des Leiters ist. Der Lunker wird hier in erster Näherung als Kugel mit Radius A beschrieben, die sich in einem unbegrenzt ausgedehntem Leiter der Leitfähigkeit σ befindet. In sehr großer Entfernung von dem Hohlraum verläuft der Strom homogen in $x-$ Richtung. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke in der Umgebung des Lunkers. (Hinweis: Dies Problem lässt sich auf eine Fragestellung aus der Elektrostatik zurückführen.)

Aufgabe 5.1.7

Im Ursprung eines Koordinatensystems befindet sich nach Bild 5.2 eine Metallkugel mit dem Radius a. Die Kugel ist geerdet. Sie befindet sich in einer dielektrischen Hohlkugel mit der relativen Dielektrizitätszahl ϵ_1.Ihr Innenradius ist a und der Außenradius b. Im Außenraum liegt ein elektrisches Feld an, das in großer Entfernung zur Anordnung ungestört $\vec{E} = E_0\vec{e}_z$ ist.

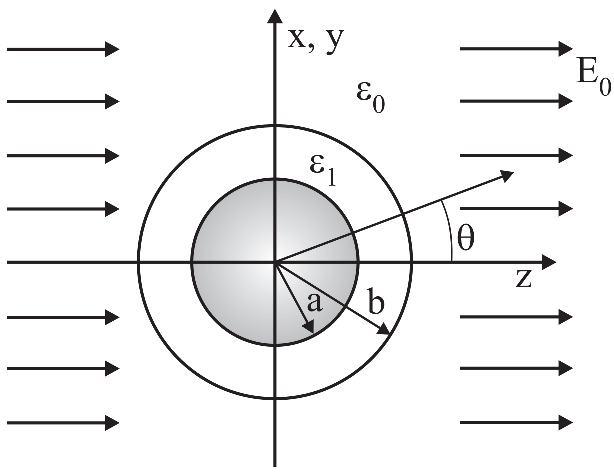

Abbildung 5.2: Dielektrische Hohlkugel um eine geerdete Metallkugel. Das skizzierte elektrische Feld soll von der Anordnung ungestört sein.

a) Welche Größe hat das radiale Feld in großer Entfernung von der Anordnung?

b) Wie hängt das Potential vom Winkel Φ ab?

c) Wie lauten die Randbedingungen für die Felder bzw. Potentiale auf der Metallkugel, an der Oberfläche der dielektrischen Kugel und im Fernfeld?

d) Berechnen Sie das Potential in allen Raumgebieten. Verwenden Sie dafür Kugelflächenfunktionen.

Aufgabe 5.1.8

Ein Zylinder mit dem Durchmesser $2a$ ist paraxial zur z-Achse eines Koordinatensystems angeordnet. Der metallische Mantel und der Deckel bei $z = l$ sind geerdet. Am Boden bei $z = 0$ ist das Potential

$$V = \mathrm{J}_1 \left\{ x_{13} \frac{\rho}{a} \right\} \cdot \cos\left\{ \varphi - \varphi_0 \right\}$$

eingeprägt, wobei x_{13} die 3. Nullstelle der Besselfunktion 1. Ordnung ist.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Welche Differentialgleichung kann für das Potential angegeben werden?

c) Wie lautet der vollständige Lösungsansatz für V?

d) Was resultiert für $\rho = 0$ für die Koeffizienten?

e) Was folgt aus der Randbedingung bei $\rho = a$ für eine der Separationskonstanten?

f) Was folgt aus der Randbedingung bei $z = l$?

g) Was folgt aus der Randbedingung bei $z = 0$?

h) Welche Größe haben die Produkte der verbleibenden Koeffizienten?

i) Wie lautet die Lösung von V unter Berücksichtigung der errechneten Ergebnisse?

k) Wie lautet die vollständige Lösung für V?

Aufgabe 5.1.9

Im folgenden wird ein Viertelzylinder betrachtet, d.h. ein Zylinder, dessen Grundfläche nur aus einem Viertelkreis besteht. Die eine Stirnseite des Viertelzylinders, dessen Achse mit der

z-Achse zusammenfällt, liege im ersten Quadranten des x-y-Koordinatensystems bei $z = 0$. Der Viertelzylinder dehne sich in positive z-Richtung aus. Er habe den Radius a und die Länge l.
Auf der Stirnseite bei $z = 0$ habe der Zylinder das Potential V_0. Ansonsten seinen alle Seiten geerdet.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Ergänzen Sie die Anordnung zu einem Vollzylinder. Hilfe: Wie spiegeln sich die Oberflächenladungen der Stirnseite an den Kanten des Viertelzylinders?

c) Stellen Sie die notwendigen Differentialgleichungen auf.

d) Wie lautet der allgemeine Lösungsansatz?

e) Was resultiert für $\varrho = 0$ für die Koeffizienten?

f) Was folgt aus $\varrho = a$ für eine der Separationskonstanten?

g) Durch geeignete Translation verschwindet eine der beiden Funktionen von z. Wie lautet die Transformation und welche Funktion verschwindet?

h) Welche Randbedingungen gelten an den Randflächen des Viertelzylinders? Was folgt daraus für die Koeffizienten der φ-Abhängigkeit?

i) Wie lautet der vereinfachte Lösungsansatz?

k) Entwickeln Sie die Koeffizienten nach φ.

l) Entwickeln Sie soweit möglich die Koeffizienten nach r.

m) Wie lautet die vollständige Lösung?

Aufgabe 5.1.10

Im folgenden wird ein ladungsfreier Viertelzylinder betrachtet, d.h. ein Zylinder, dessen Grundfläche aus nur einem Viertelkreis besteht. Seine Achse fällt mit der z-Achse zusammen

und die Stirnseiten liegen im ersten Quadranten des x-y-Koordinatensystems. Der Viertelzylinder dehnt sich in positive z-Richtung aus. Er hat den Radius a und die Länge l.
Auf der Stirnseite bei $z = 0$ hat der Zylinder das Potential $V_C = C \cdot x \cdot y$, die anderen Seiten sind geerdet.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet das Potential V_C unter Verwendung von Zylinderparametern?

c) Wie lautet der vollständige Lösungsansatz für V in einem Vollzylinder?

d) Wählen Sie eine geeignete Untermenge der von φ-abhängigen Funktionen, die die Randbedingungen bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ erfüllen.

e) Bildet diese Untermenge ein vollständiges Orthogonalsystem im Bereich $0 < \varphi < \pi/2$?

f) Durch geeignete Translation verschwindet eine der beiden Funktionen von z. Wie lautet die Transformation und welche Funktion verschwindet?

g) Wie lautet der vollständige Lösungsansatz für V in dem Viertelzylinder?

h) Entwickeln Sie die Koeffizienten nach φ.

i) Entwickeln Sie die Koeffizienten nach ϱ.

k) Wie lautet die vollständige Lösung?

Formeln zur Besselfunktion:

$$\begin{aligned}\int x^{n+1}\,\mathrm{J}_n(x)\,dx &= x^{n+1}\,\mathrm{J}_{n+1}(x)\\ \int x^{-n+1}\,\mathrm{J}_n(x)\,dx &= x^{-n+1}\,\mathrm{J}_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Aufgabe 5.1.11

Zeigen Sie, dass für die Entelektrisierungsfaktoren N einer unendlich ausgedehnten Platte bzw. eines unendlich langen geraden Kreiszylinders gilt

$$N_{\text{Platte}} = \frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_a(\epsilon_i - 1)},$$

$$N_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_i - \epsilon_a}{\epsilon_a(\epsilon_i - 1)},$$

wenn diese aus einem Material der relativen Dielektrizitätszahl ϵ_i bestehen und sich in einem Raum mit der relativen Dielektrizitätszahl $\epsilon_a < \epsilon_i$ befinden. Das äußere elektrische Feld sei senkrecht zur Platte bzw. zur Zylinderachse gerichtet.

5.2 Die Spiegelungsmethode

Aufgabe 5.2.1

Die Greensche Funktion $G\{\vec{r}, \vec{r'}\}$ für den Halbraum $x \geq 0$ soll bestimmt werden.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet das Potential im Halbraum $x \geq 0$ bei beliebiger Anordnung der Quellladung? Verwenden Sie die Spiegelungsmethode.

c) Wie lautet die Greensche Funktion?

Aufgabe 5.2.2

Das Potenzial eines elektrischen Dipols $\vec{p}_{\mathrm{a}} = p_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + p_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$ mit der Ausdehnung $|\vec{d}|$, der sich am Punkt $\vec{r}_{\mathrm{a}}$ im Abstand $a \ll ||\vec{d}||$ vor einer ebenen, geerdeten Metalloberfläche befindet, soll bestimmt werden. Die Metallfläche befindet sich bei $z = 0$, der Dipol ist im positiven Halbraum $z > 0$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass sich eine möglichst einfache Darstellung für $\vec{r}_{\mathrm{a}}$ ergibt.

a) Wie lauten das Potenzial V_{a} und das elektrische Feld $\vec{E}_{\mathrm{a}}$ des Dipols ohne die Metallplatte im positiven Halbraum? Geben Sie eine Näherung für $|\vec{r}_{\mathrm{a}} - \vec{r}| \gg |\vec{d}|$ an (Punktdipol).

b) Konstruieren Sie zu dem gegebenen Dipol $\vec{p}_{\mathrm{a}}$ den Bilddipol $\vec{p}_{\mathrm{b}}$. Geben Sie den Ort $\vec{r}_{\mathrm{b}}$ des Bilddipols in vektorieller Schreibweise an.

c) Wie lautet die vektorielle Darstellung für den Bilddipol $\vec{p}_{\mathrm{b}}$?

d) Bestimmen Sie das Gesamtpotenzial $V\{\vec{r}\}$ im positiven Halbraum mit der Näherung aus a).

e) Wie groß ist das elektrische Feld $\vec{E}$ im positiven Halbraum?

f) Geben Sie die Oberflächenladungsdichte $\varrho_\mathrm{s}\{\vec{r}\}$ an, die als Folge des Dipols $\vec{p}_\mathrm{a}$ auf der Metalloberfläche influenziert wird.

Aufgabe 5.2.3

Im freien Raum ist eine ideal leitfähige ungeladene metallische Hohlkugel angebracht. Ihr Außenradius sei b, der Innenradius a.
Die Hohlkugel sei zunächst geerdet. Eine Punktladung Q wird in den Abstand $c > b$ zum Kugelmittelpunkt gebracht.

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Welche Ladungsmenge fließt auf die Hohlkugel? Welche Ersatzladungsverteilung erzeugt das gleiche Potenzial im Raum außerhalb der Kugel? Wie groß ist die Kraft, die auf die Punktladung wirkt?

Die Kugel sei nun isoliert aufgehängt.

b) Wie groß ist nun die Ladung der Kugel, wenn wieder die Punktladung Q nach c gebracht wird? Erweitern Sie die Ersatzladungsverteilung aus a), so dass die Randbedingungen erfüllt werden. Wie groß ist die Kraft auf Q jetzt?

Aufgabe 5.2.4

Die Ebene $z = 0$ sei die Grenzfläche des geerdeten metallischen Halbraums $z < 0$. Längs der z-Achse liegt im Abschnitt $0 < z \leq \ell$ eine Linienladung der konstanten Linienladungsdichte ϱ_L. Gesucht ist das elektrostatische Potential im Halbraum $z > 0$ mit $\epsilon = \epsilon_0$.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet das Potential einer Linienladung im freien Raum? Verwenden Sie das Coulomb-Integral und suchen Sie zunächst nur eine Stammfunktion.

c) Skizzieren Sie eine Ersatzladungsverteilung im freien Raum, die das gleiche Potential wie die Linienladung vor der Metalloberfläche erzeugt.

d) Wie lautet das Potential im Raum $z \geq 0$?

e) Wie lautet die Oberflächenladungsdichte auf der Metalloberfläche?

f) Welche Oberflächenladungsdichte stellt sich im Fall $\ell \to \infty$ auf der metallischen Grenzfläche ein?

Aufgabe 5.2.5

Der Raum ist für $x > 0$ mit einem Medium der Dielektrizitätszahl ϵ_1, für $x \leq 0$ mit einem Material der Dielektrizitätszahl ϵ_2 gefüllt. Auf der x-Achse befindet sich eine Punktladung Q_0 bei $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)^T$ mit $x_0 > 0$. Die Trennfläche zwischen beiden Medien ist ladungsfrei.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

Für die Berechnung des Potentials im Bereich 1 ($x \geq 0$) wird bei $x = -x_2$ eine Spiegelladung Q_2 angenommen. Entsprechend verfährt man für das Potential im Bereich 2 ($x < 0$), d.h. es wird bei $x = x_1$ eine Ladung Q_1 angenommen.

b) Wie lautet das Potential V_1 bzw. V_2 in den Bereichen 1 bzw. 2 unter der jeweiligen Annahme der virtuellen Ladung Q_2 bzw. Q_1?

c) Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ an der Grenzfläche $x = 0$?

d) Bestimmen Sie die Größen x_1, x_2, Q_1 und Q_2 aus den Stetigkeitsbedingungen unter der Annahme, dass die Größen von den Koordinaten des Aufpunktes $\vec{r}$ unabhängig sind.

e) Wie lautet das Potential im gesamten Raum?

f) Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

Aufgabe 5.2.6

Der Raum ist für $x > 0$ mit einem Medium der Dielektrizitätszahl ϵ_1, für $x \leq 0$ mit einem Material der Dielektrizitätszahl ϵ_2 gefüllt. Auf der x-Achse befindet sich eine Punktladung Q_0 bei $\vec{r}_0 = (x_0, 0, 0)^T$ mit $x_0 > 0$. Die Trennfläche zwischen beiden Medien ist ladungsfrei.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

Für die Berechnung des Potentials im Bereich 1 ($x \geq 0$) wird bei $x = -x_2$ eine Spiegelladung Q_2 angenommen. Entsprechend verfährt man für das Potential im Bereich 2 ($x < 0$), d.h. es wird bei $x = x_1$ eine Ladung Q_1 angenommen.

b) Wie lautet das Potential V_1 bzw. V_2 in den Bereichen 1 bzw. 2 unter der jeweiligen Annahme der virtuellen Ladung Q_2 bzw. Q_1?

c) Wie lauten die Stetigkeitsbedingungen für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ an der Grenzfläche $x = 0$?

d) Bestimmen Sie die Größen x_1, x_2, Q_1 und Q_2 aus den Stetigkeitsbedingungen unter der Annahme, dass die Größen von den Koordinaten des Aufpunktes $\vec{r}$ unabhängig sind.

e) Wie lautet das Potential im gesamten Raum?

f) Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

Aufgabe 5.2.7

Zwei in $z-$ Richtung unendlich ausgedehnte metallische Zylinder mit den Achsenlagen $(d/2, 0)$ bzw. $(-d/2, 0)$ und den Radien $R_1 < d/2$ bzw $R_2 < d/2$ befinden sich auf den konstanten Potentialen $V_1 = 0$ bzw. $V_2 = V_0$. Das Potential im gesamten Raum außerhalb der Zylinder soll mit Hilfe der Spiegelungsmethode berechnet werden $(\varepsilon = 1)$. Dafür wird jeder Zylinder durch eine achsparallele Linienladung ersetzt.

a) Zeichnen Sie die Ersatzladungsanordnung und berechnen Sie die Größe der Ersatzlinienladungen ϱ_{L1} und ϱ_{L2} sowie ihre räumliche Lage (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) .

b) Berechnen Sie die Potenzialverteilung im Raum außerhalb der Zylinder.

c) Welche Flächenladungsdichte tragen die Zylinder?

d) Wie groß ist die längenbezogene Kapazität der Anordnung?

Aufgabe 5.2.8

In der Höhe h oberhalb des Mittelpunktes einer ideal leitenden, geerdeten Kugel vom Durchmesser D_1 befindet sich eine kreisförmige Linienladung ϱ_L vom Durchmesser $D_2 > D_1$. Die Achse der Linienladung verläuft durch den Mittelpunkt der Kugel. Der Ursprung eines Zylinderkoordinatensystems sei so gewählt, dass er im Mittelpunkt der Kugel liegt. Die $z-$ Achse verlaufe durch den Mittelpunkt der Linienladung.

a) Geben Sie eine Ersatzladungsverteilung an, durch die die Wirkung der Kugel auf das elektrische Feld berücksichtigt werden kann.

b) Berechnen Sie das resultierende Feld der Anordnung auf der $z-$ Achse.

c) Es gelte $h = 0$. Geben Sie alle Nullstellen der Feldstärke auf der $z-$ Achse innerhalb und außerhalb des Kugelbereichs an.

Aufgabe 5.2.9

Ein unendlich langer geradliniger Leiter mit dem konstanten Strom I ist im Abstand a parallel zur Trennebene zweier Medien mit den Permeabilitäten μ_1 und μ_2 angeordnet. Berechnen Sie die magnetische Induktion der Anordnung. Die Aufgabe kann formal genauso gelöst werden wie (4.7.5). Verwenden Sie die dort ermittelten Ergebnisse unter Berücksichtigung der Dualität zwischen elektrischem und magnetischem Feld (Analogie: Bildladungen $\leftrightarrow$ Bildströme).

a) Skizzieren Sie die Anordnung. Welche Ersatzladungsanordnungen können zur Berechnung der Felder in den Bereichen 1 ($x \geq 0$) und 2 ($x < 0$) herangezogen werden (Skizzen)?

b) Wie lautet das Magnetfeld $\vec{H}$ eines Stromfadens im freien Raum? Der Stromfaden ist in z-Richtung orientiert und befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems. Verwenden Sie kartesische Koordinaten (Einheitsvektoren und Parameter).

c) Wie lautet das Magnetfeld des Stromfadens, wenn er bei $x = d$ liegt?

d) Wie groß ist das Magnetfeld im Bereich 1, wenn der Spiegelstrom die Größe I_2 hat? Wie groß ist $\vec{B}_1$?

e) Welches Magnetfeld $\vec{H}_2$ herrscht im Bereich 2, wenn der Orginalstrom I zu $I' = I + I_1$ modifiziert wird? Wie groß ist $\vec{B}_2$?

f) Wie lauten die Randbedingungen an der Grenzfläche $x = 0$?

g) Welche Größen müssen I_2 und I_1 annehmen, damit die Randbedingungen erfüllt sind?

h) Wie lautet das Magnetfeld im gesamten Raum?

i) Welche Größe hat $\vec{B}$ in den beiden Bereichen?

5.4 Lösung der zweidimensionalen Poisson-Gleichung

Aufgabe 5.4.1

Der erste Quadrant $x > 0, \quad y > 0$ der x-y-Ebene besteht aus einer unendlich ausgedehnten Metallplatte der Dicke d aus einem Material mit der elektrischen Leitfähigkeit σ. Nach Bild 5.3 trägt diese Platte eine Bohrung vom Radius δ mit dem Mittelpunkt im Punkte $x = a$, $y = a$, und es sei $\delta \ll a$. Durch den Rand dieser Bohrung wird ein Strom zugeführt und durch die begrenzenden Kanten der Platte (positive x- und y-Halbebene) wieder abgeführt. Berechnen Sie den elektrischen Widerstand dieser Anordnung unter der Annahme, dass das elektrische Potential auf dem Kreis mit dem Radius δ um den Mittelpunkt der zuführenden Elektrode konstant ist.
(Hinweis: Da das Potential auf der Elektrode konstant ist, hat die Stromdichte keine z-Komponente. Für die Berechnung genügt daher ein zweidimensionales Modell. Berechnen

Sie zunächst die Kapazität einer äquivalenten Anordnung, indem Sie von einer (unendlich langen) Linienladung an der Stelle der zuführenden Elektrode ausgehen. Benutzen Sie anschließend den Zusammenhang zwischen Kapazität und Widerstand einer geometrischen Anordnung.)

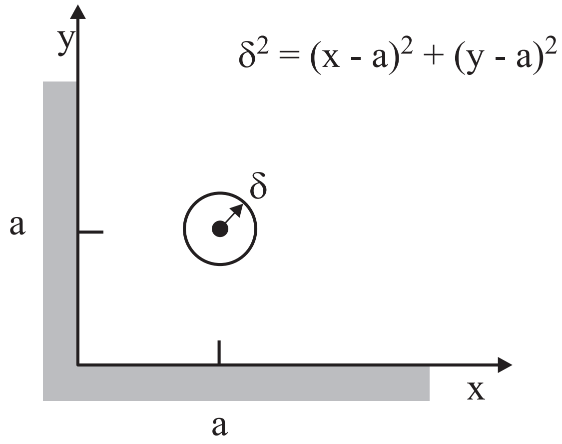

Abbildung 5.3: Leitfähige Platte im ersten Quadranten mit zylindrischer Stromzuführung im Punkt $x = a$, $y = a$

Aufgabe 5.4.2

Zwei in $z-$ Richtung unendlich ausgedehnte metallische Zylinder mit gleichem Radius $2a$ und Mittelpunkten bei $(4a, 0, 0)$ und $(-a, 0, 0)$ liegen auf den Potentialen V_1 und V_2. Die Potenzialverteilung soll mit Hilfe der konformen Abbildung $w\{z\} = \frac{1}{z}$ ermittelt werden.

a) Skizzieren Sie die Anordnung in der $z-$ Ebene mit allen Randbedingungen und charakteristischen Punkten.

b) Wie lauten die Kreisgleichungen für die beiden Zylinder in der z-Ebene?

c) Wie lauten die Gleichungen aus b) nach Transformation in die w-Ebene und Umformung auf eine Normalenform? (Beachten Sie: Kreise werden in Kreise oder Geraden abgebildet.)

d) Skizzieren Sie die Anordnung in der w-Ebene mit allen charakteristischen Punkten und Randbedingungen.

Das Potential der hier gefundenen Abbildung kann mit einigem Wissen direkt angegeben werden. Einfacher ist es jedoch, die konforme Abbildung $w' = \ln\{w - w_0\}$ anzuwenden. Hierbei ist w_0 der Mittelpunkt der Anordnung.

e) Skizzieren Sie die Anordnung in der w'-Ebene. Geben Sie die charakteristischen Punkte an.

f) Wie lautet das komplexe Potential in der w'-Ebene? Berechnen Sie die komplexen Potentiale in der w- und z-Ebene durch Rücktransformation. Wie lautet das reelle Potential in der z-Ebene?

g) Wie lautet das elektrische Feld in der z-Ebene?

Aufgabe 5.4.3

In einem Keil, der aus geerdeten Metallplatten gebildet wird, die im Winkel ϑ zueinander stehen und in z-Richtung unbegrenzt ausgedehnt sind, ist parallel zur z-Achse eine Linienladung ϱ_L bei (x_0, y_0) angebracht. Das Potential im Keil, ist mit Hilfe der konformen Abbildung $w = z^n$, $n = \frac{\pi}{\vartheta}$ zu bestimmen.

a) Skizzieren Sie die Anordnung in der z- und in der w-Ebene.

b) Wie lautet das komplexe Potential in der w-Ebene? Wenden Sie die Spiegelungsmethode an. Die Originalladung liegt bei $w = W_0$. An welchem Ort w ist die Spiegelladung zu finden? Wie lautet das reelle Potential?

c) Wie lautet das reelle Potential in der z-Ebene? Verwenden Sie für die Originalladung den Punkt z_0.

d) Wie lautet das reelle Potential unter Verwendung der Eulerschen Schreibweise $z = r\exp\{i\varphi\}$? Die Originalladung befindet sich bei $z_0 = r_0\exp\{i\varphi_0\}$. Welchen Definitionsbereich hat φ?

e) Wie vereinfacht sich das Ergebnis aus c) für den Fall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$?

f) Wie vereinfacht sich das Potential aus d) für den Fall, dass sich die Ladung auf der Winkelhalbierenden des Keils befindet?

Aufgabe 5.4.4

Im freien Raum ist ein geerdeter, unendlich ausgedehnter Metallzylinder mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius r_0 angeordnet. Seine Achse fällt mit der z- Achse des Koordinatensystems zusammen. Parallel zur z- Achse befindet sich außerhalb des Zylinders im Abstand r' eine konstante Linienladung ϱ_L.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

Mit Hilfe der konformen Abbildung $\left(w\{z\} = \dfrac{z - r_0}{z + r_0}\right)$ lässt sich ein Kreis vom Radius r_0 um den Ursprung in eine Gerade transformieren.

b) Skizzieren Sie die Transformation. Wohin wird das Innere des Kreises abgebildet? Zeichnen Sie die Linienladung ein.

c) Wie lautet das komplexe Potential in der w-Ebene nach Anwendung der Spiegelungsmethode?

d) Wie lautet das komplexe Potential in der gesamten z-Ebene außerhalb des Zylinders?

e) Wie lautet das reelle Potential in der z-Ebene

Aufgabe 5.4.5

Das durch

$$0 < x < \infty, \qquad 0 < y < \infty, \qquad -\infty < z < \infty$$

beschriebene Raumgebiet sei auf den Flächen $x = 0$ und $y = 0$ durch geerdete Metallfolien begrenzt. Längs der durch die Gleichungen $x = a$ und $y = b$ festgelegten Geraden befinde sich eine konstante Linienladung der Dichte ϱ_L.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Verwenden Sie die Abbildung $w = z^2$. Wie sieht die abgebildete Geometrie aus? An welchen Ort w_0 wird die Linienladung abgebildet?

c) Durch welche Ladungsverteilung kann der Einfluss der metallischen Begrenzung in der w-Ebene ersetzt werden? Geben Sie deren Größe und Ort an.

d) Wie lautet das komplexe Potential in der w-Ebene?

e) Welches Potenzialproblem liegt hier vor (original/dual)?

f) Wie lautet das Potential in der z-Ebene? Durch welche Ladungsverteilung kann der Einfluss der metallischen Begrenzung also ersetzt werden (Skizze)?

g) Welche Größe hat das elektrische Feld in der z-Ebene?

h) Wie groß ist die influenzierte Ladung (pro Längeneinheit in z-Richtung) auf der metallischen Grenzfläche $x = 0$, $0 < y < \infty$?

i) Wie groß ist die insgesamt influenzierte Ladung (pro Längeneinheit in z-Richtung) auf beiden metallischen Grenzflächen?

Aufgabe 5.4.6

In der komplexen z-Ebene ist eine geerdete Metallfolie bei $x \geq 0$ und $y = 0$ angebracht. Parallel zu dieser Schneide liegt eine Linienladung ϱ_l bei $z = z_0$. Die elektrische Feldstärke soll im gesamten Raum mit Hilfe des komplexen Potentials unter Verwendung der Abbildung $z = -w^2$ berechnet werden.

a) Skizzieren Sie die Anordnung in der z-Ebene.

b) Skizzieren Sie die beiden Anordnungen in der w-Ebene.

Für die weitere Rechnung wählen Sie den Bereich, an dem $u_0 > 0$ ist.

c) Welche Koordinaten beschreiben die Äquipotenzialfläche $V = 0$ in der w-Ebene?

d) Welche Ersatzladungsverteilung erzeugt in der w-Ebene das gleiche Potential? Geben Sie Größe und Ort der Ladungsverteilung an.

e) Wie lautet das komplexe Potential in der w-Ebene?

f) Wie lautet die Randbedingung für das komplexe elektrische Feld auf der Äquipotenzialfläche $V = 0$ in der w-Ebene?

g) Berechnen Sie $\nabla_w V$.

h) Welches Potenzialproblem liegt hier vor? Vergleichen Sie die Ergebnisse aus f) und g) und entscheiden Sie an Hand der Formel zur Berechnung des elektrischen Feldes.

i) Welche Größe hat das elektrische Feld in der z-Ebene? Verwenden Sie die parametrische Darstellung $z = g\{w\}$.

k) Wie lautet die Umkehrfunktion $w = f\{z\} = g^{-1}\{z\}$?

l) Wie lautet das komplexe Potential in der z-Ebene? Warum gibt es <u>keine</u> weitere Spiegelladung?

m) Berechnen Sie das komplexe elektrische Feld in der z-Ebene und vergleichen Sie mit der Lösung aus i) durch Einsetzen.

Kapitel 6

Zeitabhängige Felder

6.1 Elektromagnetische Gesetze für zeitabhängige Felder

Aufgabe 6.1.1

Ein kugelförmiger Ballon pulsiert radial nach dem Gesetz $R\{t\} = R_0(1 + \alpha \sin\{\omega t\})$, $0 < \alpha < 1$. Er trägt auf der Oberfläche die Ladung Q. Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld außerhalb des Ballons.

Kapitel 7

Maxwell Gleichungen und Wellengleichung

7.3 Energiesatz der Elektrodynamik

Aufgabe 7.3.1

Die Strahlungsdichte der Sonne wird auch als Solarkonstante bezeichnet und beträgt auf der Erde S (= 1,35 kW/m^2). Berechnen Sie die elektrische und magnetische Feldstärke unter der Voraussetzung, dass die Strahlung nur bei einer Frequenz erfolgt!

Aufgabe 7.3.2

Eine elektrische Leitung ist wie in den Aufgaben 2.2.1 und 3.1.7 aufgebaut. Sie besteht aus einem kreiszylindrischen Innenleiter mit Radius a (Querschnitt S_i) und einem sehr dünnen koaxialen Hohlzylinder vom Innendurchmesser $b > a$ und Außendurchmesser $c > b$ (Querschnitt S_a). Auf den beiden Zylindern fließen entgegengesetzt gleich große Ströme $\pm J$. Die Leitfähigkeit des Zylindermaterials ist σ. Die Achsen der Zylinder sind mit der z-Achse eines Koordinatensystems identisch. Im Ursprung des Koordinatensystems wird die Spannung

U zwischen Innen- und Außenleiter gemessen. Gesucht ist die Energiestromdichte auf der Leitung.

a) Skizzieren Sie die Anordnung im Quer- und Längsschnitt (x-y- und x-z-Ebene).

b) Wie ist die Energiestromdichte definiert?

c) Wie lautet das Magnetfeld $\vec{H}$ im Raum (Ergebnisse aus 2.1.7)?

d) Welche Größe hat das elektrische Feld in der Leitung (Ergebnisse aus 4.2.1)?

e) Wie groß ist der Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ im Innen- und Außenleiter?

f) Wie groß ist der Poyntingvektor im Bereich $a \leq \rho \leq b$? Was resultiert für den Fall unendlich guter Leitfähigkeit?

Kapitel 8

Wellenausbreitung in Dielektrika

8.1 Ebene elektromagnetische Wellen

Aufgabe 8.1.1

Aufgabe wie in der Klausur

Zwei zirkular polarisierte Wellen, die die gleiche Frequenz haben und sich zueinander parallel ausbreiten, werden miteinander überlagert. Gesucht ist das resultierende elektrische Feld. Verwenden Sie den Ansatz

$$\vec{E}_{1,2} = E_{1,2} \exp\{i(\omega\, t - kz + \varphi_{1,2})\} \cdot (1,\ \exp\{i\gamma_{1,2}\},\ 0)^T$$

für die komplexen Feldamplituden $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ der zirkular polarisierten Wellen mit Ausbreitung in z-Richtung. Die Skalare E_1 sowie E_2 sind positiv reell.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet die allgemeine Lösung für die resultierende Feldstärke?

Wie vereinfacht sich die Lösung für die folgenden Fälle? Beachten Sie, dass

$$\gamma_1 \,\text{und}\, \gamma_2 \in \mathbb{R}$$
$$|\gamma_1| = |\gamma_2| = \frac{\pi}{2}$$

gelten soll.

b) $\gamma_1 = \gamma_2$, E_1 und E_2 beliebig

c) $\gamma_1 = -\gamma_2$, E_1 und E_2 beliebig

d) $\gamma_1 = \pm\gamma_2$, $E_1 = E_2$

Aufgabe 8.1.2

Zwei ebene Wellen mit gleicher Amplitude $\vec{H} = (H, 0, 0)^T$, Phasenlage und Frequenz breiten sich in einem homogenen Medium mit den Ausbreitungsvektoren $\vec{k_1} = (0, k_y, k_z)^T$ und $\vec{k_2} = (0, -k_y, k_z)^T$ aus.

a) Berechnen Sie die Verteilung des elektrischen und des magnetischen Feldes aus der Überlagerung der beiden Wellen.

b) In welcher Richtung breitet sich die resultierende Welle aus? Welche Phasengeschwindigkeit hat die Welle?

Die mit einem Detektor messbare Energie der Wellen ist dem raum- und zeitgemittelten Poyntingvektor proportional.

c) Berechnen Sie den Poyntingvektor der resultierenden Welle! Wie lautet der Poyntingvektor nach Zeitmittelung? Welche Form nimmt er nach zusätzlicher Raummittelung an?

d) Welche Größe hat die raum- und zeitgemittelte Energiedichte der resultierenden Welle?

e) Wie lautet der Zusammenhang zwischen dem Poyntingvektor und der Energiedichte nach jeweiliger Raum- und Zeitmittelung?

Aufgabe 8.1.3

Ein Impuls $a\{t\}$ breitet sich in einem dispersiven Medium mit der Wellenzahl

$$\vec{k}\{\omega\} = \vec{k}\{0\} + \left.\frac{\mathrm{d}\vec{k}}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=0} \cdot \omega = \vec{k_0} + \vec{k_0'}\omega$$

$(\omega = 2\pi\nu)$ von $\vec{r} = 0$ nach $\vec{r}$ aus.

a) Zerlegen Sie die Zeitfunktion $a\{t\}$ spektral durch Fouriertransformation in ebene Wellen. Wie lautet die Fourierdarstellung für $a\{t\} = Re\,\{a'\,\{t, 0\}\}$ bei $\vec{r} = 0$?

b) Wie lautet die Fourierdarstellung für $a'\{t\}$ bei $\vec{r}$?

c) Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Fourierkomponenten von $a'\{t, 0\}$ und $a'\{t, \vec{r}\}$?

d) Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat der Impuls?

e) Die Zeitfunktion ist bei $\vec{r} = 0$ durch $a\{t, 0\} = a_0 \cos\{\omega_1 t\} \cos\{\omega_2 t\}$ mit $\omega_1 << \omega_2$ gegeben. Der Ausbreitungsvektor hat die Form $\vec{k} = \frac{1}{a} \cdot (1 + \omega/\omega_0) \cdot \vec{e_x}$. Welche Zeitfunktion resultiert daraus am Ort $\vec{r} = r\vec{e_x}$?

Aufgabe 8.1.4

Gegeben sei das elektrische Feld einer ebenen Welle in komplexer Schreibweise:

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_{\mathrm{x}} \quad .$$

Die Welle breitet sich im freien Raum aus.

a) Geben Sie den Wellenzahlvektor $\vec{k}$ an.

b) Wie ist die Welle polarisiert?

c) Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$.

d) Skizzieren Sie den zeitliche Verlauf der Amplitude der elektrischen Feldstärke an einem festen Punkt $z = z_0$. Wie verläuft die Amplitude der magnetischen Feldstärke?

e) Skizzieren Sie die zeitliche Amplitudenentwicklung am Punkt $z = z_0 + \pi/(4\beta)$

Aufgabe 8.1.5

Aufgabe wie in der Klausur

Zwei ebene Wellen breiten sich gemäß $\vec{E}_1 = E_1 \exp\{i(\vec{k}_1 \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{z}$ und $\vec{E}_2 = E_2 \exp\{i(\vec{k}_2 \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y}$ in einem Medium mit Materialkonstanten ε und μ in x-Richtung aus. Die Amplituden stehen im Verhältnis $E_2 = aE_1 \exp\{i\varphi\}$.

Skizzieren Sie die Bewegung der Vektorspitzen des Realteils der elektrischen und magnetischen Feldstärke in Abhängigkeit von der Zeit an einem festen Raumpunkt $\vec{r}_0$.

Hinweis zur Lösung Verwenden Sie für die Darstellung die y-und z- Komponenten der Felder als Abzisse und Ordinate. Nehmen Sie $\vec{r}_0 = 0$, $a = 0.5$ und $\varphi = \pi/3$ an. Normieren Sie die elektrische Feldstärke auf E_1 und die magnetische Feldstärke auf die korrespondierende Amplitude.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie lautet $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ in vektorieller Darstellung?

b) Wie lautet der Realteil der gesamten elektrischen Feldstärke?

c) Berechnen Sie die Magnetfelder $\vec{H}_1$ und $\vec{H}_2$ und deren Überlagerung sowie den Realteil des Gesamtfeldes.

d) Skizzieren Sie den Verlauf der Realteile von $\vec{E}$ ud $\vec{H}$ in einer gemeinsamen Darstellung als Funktion der Zeit. Tragen Sie die Richtungen von E und H zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie die Drehrichtung ein.

8.2 Reflexion und Brechung

Aufgabe 8.2.1

Aufgabe wie in der Klausur

Eine ebene Welle breitet sich im Halbraum $x < 0$ mit dem Wellenvektor $\vec{k}_\mathrm{i} = (k_\mathrm{x}, k_\mathrm{y}, 0)^\mathrm{T}$ aus. Das elektrische Feld ist $\vec{E}_\mathrm{i} = (E_\mathrm{x}, E_\mathrm{y}, E_\mathrm{z})^\mathrm{T}$. Die Dielektrizitätszahl ist $\varepsilon_1\varepsilon_0$ für $x \leq 0$ bzw. $\varepsilon_2\varepsilon_0$ für $x > 0$. Der ganze Raum ist unmagnetisch und enthält keine freien Ladungen. Die magnetische Feldstärke der einfallenden Welle und die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle sind zu bestimmen.

Zusatzfragen für die Übung

a) Wie hängen k_x, k_y und k zusammen? Wie hängen $\vec{E}$ und $\vec{k}$ der einfallenden Welle zusammen? Was resultiert daraus?

b) Welche Größe hat die magnetische Feldstärke der einfallenden Welle?

c) Wie lauten die Wellenzahlvektoren der an der Grenzfläche reflektierten und transmittierten Wellen?

d) Zerlegen Sie die Welle bezüglich der Grenzfläche bei $x = 0$ in ihren TE- und TM-Anteil. Wie lauten die elektrischen und magnetischen Feldstärken der TE- und TM-Welle.

e) Wie groß sind die Reflexionsfaktoren für die TE- und die TM-Welle?

f) Welche Größe hat die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle?

Aufgabe 8.2.2

Aufgabe wie in der Klausur

Eine ebene Welle fällt aus dem Halbraum $x > 0$ in der x-z-Ebene auf die Grenzfläche $x = 0$. Das elektrische Feld ist $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)\exp\{i(\vec{k}_\mathrm{in} \circ \vec{r} - \omega t)\}$. Die Brechzahlen sind $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$ für $x \leq 0$ bzw. für $x > 0$. Der ganze Raum ist unmagnetisch und enthält keine freien Ladungen.

- Wie lautet der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle?
- Bestimmen Sie jeweils den TE- und den TM-Anteil des einfallenden Feldes.
- Wie lauten die zugehörigen magnetischen Feldstärken?
- Welche Größe haben die Ausbreitungsvektoren der reflektierten und der transmittierten Welle?

Aufgabe 8.2.3

Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung des Energietransportes bei der Reflexion einer ebenen Welle an einer ruhenden ebenen Grenzfläche. Die einfallende Welle breitet sich im Halbraum $x < 0$ mit dem Wellenvektor $\vec{k}_{\mathrm{in}} = (k_{\mathrm{x}}, k_{\mathrm{y}}, 0)^{\mathrm{T}}$ aus. Das elektrische Feld ist wie in Aufgabe 7.2.1 mit $\vec{E}_{\mathrm{in}} = (E_{\mathrm{x}}, E_{\mathrm{y}}, E_{\mathrm{z}})^{\mathrm{T}} = \left(\hat{E}_{\mathrm{x}}, \hat{E}_{\mathrm{y}}, \hat{E}_{\mathrm{z}}\right)^{\mathrm{T}} \exp\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}$ mit reellen Amplituden $\hat{E}$ zu nehmen. Die Dielektrizitätszahl ist $\varepsilon_1 \varepsilon_0$ für $x \leq 0$ bzw. $\varepsilon_2 \varepsilon_0$ für $x > 0$. Der ganze Raum ist unmagnetisch und enthält keine freien Ladungen.

a) Womit wird der Energietransport durch elektromagnetische Felder in einem Medium beschrieben? Welche Größe beschreibt den Energietransport einer ebenen Welle?

b) Welche Größe hat die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle? Wie lautet das zugehörige magnetische Feld? Geben Sie beide Felder an der Grenzfläche an. Hier kann auf die Ergebnisse aus Aufgabe 7.2.1 zurückgegriffen werden.

c) Wie lautet das aus einfallender und reflektierter Welle resultierende Feld im Halbraum $x < 0$?

d) Geben Sie die zeit- und ortsgemittelte Richtung des Energieflusses im Halbraum $x < 0$ an. (Diese Berechnung ist sehr zeitaufwändig!)

Aufgabe 8.2.4

Aufgabe wie in der Klausur

Eine elliptisch polarisierte, ebene Welle fällt aus der Luft unter dem Winkel ϑ_e auf die Grenzfläche zu dem unmagnetischen Halbraum $x < 0$ der Dielektrizitätszahl ε. Die Einfallsebene sei hier die $x - y-$ Ebene, das elektrische Feld ist so polarisiert, dass die kleine Halbachse der Ellipse parallel zur $z-$ Richtung weist. Das Verhältnis der großen zur kleinen Ellipsenhalbachse ist A.

Wie muss ε gewählt werden, damit die reflektierte Welle linear bzw. zirkular polarisiert ist?

Zusatzfragen für die Übung

a) Skizzieren Sie die Anordnung.

b) Wie lautet der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle?

c) Wie lauten die Wellenzahlvektoren der reflektierten und transmittierten Wellen?

d) Wie lautet der Ansatz für das elektrische Feld $\vec{E}$ der einfallenden Welle?

e) Welche Größe hat das zugehörige magnetische Feld $\vec{H}$?

f) Zerlegen Sie das elektrische Feld der einfallenden Welle in TE- und TM-polarisierte Felder bezüglich der Grenzfläche.

g) Wie lauten die Reflexionsfaktoren r_TE und r_TM der beiden Polarisationen?

h) Welche Bedingung muss an die Reflexionsfaktoren gestellt werden, wenn die resultierende reflektierte Welle linear polarisiert sein soll? Wie muss ε in diesem Fall gewählt werden?

i) Welche Bedingung müssen die Reflektionsfaktoren erfüllen, wenn das resultierende reflektierte Feld zirkular polarisiert sein soll? Wie muss ε in diesem Fall gewählt werden?

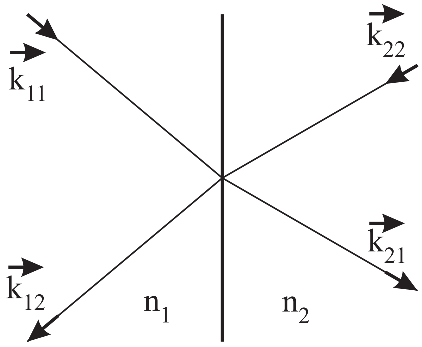

Abbildung 8.1: Überlagerung zweier gleich polarisierter Wellen von beiden Seiten einer Grenzfläche, so dass sich der jeweilige transmittierte Strahl der einen Welle und der reflektierte Strahl der anderen Welle gleich ausbreiten.

Aufgabe 8.2.5

In der Vorlesung wurde der Reflexionsfaktor ebener Wellen an einer ebenen Grenzfläche unter der Voraussetzung berechnet, dass nur eine Welle von einer Seite einfällt. Hier soll der etwas allgemeinere Fall betrachtet werden, dass wie in Abbildung 8.1 von beiden Seiten die Wellen mit den elektrischen Feldern E_{11} und E_{22} und zugehörigen Wellenzahlvektoren $\vec{k}_{11}$ und $\vec{k}_{22}$ einfallen.
Beide Wellen weisen die gleiche Polarisation und Frequenz auf.

a) Geben Sie das Verhältnis r der Amplituden des elektrischen Feldes der Wellen E_{12} zu E_{11} an. Welcher Unterschied ergibt sich in der Darstellung für die TE und die TM Wellen?

Im Abstand L soll jetzt eine weitere Grenzfläche parallel zur ersten angeordnet werden, wie in Abbildung 8.2 dargestellt ist.

b) Geben Sie das Verhältnis r der Amplituden des elektrischen Feldes der Wellen E_{12} zu E_{11} für diesen Fall an. Beachten Sie die durch die zweite Grenzfläche auftretende zusätzliche Verknüpfung zwischen E_{21} und E_{22}.

c) Wie muss der Abstand L gewählt werden, damit $|r|$ maximal bzw. minimal wird?

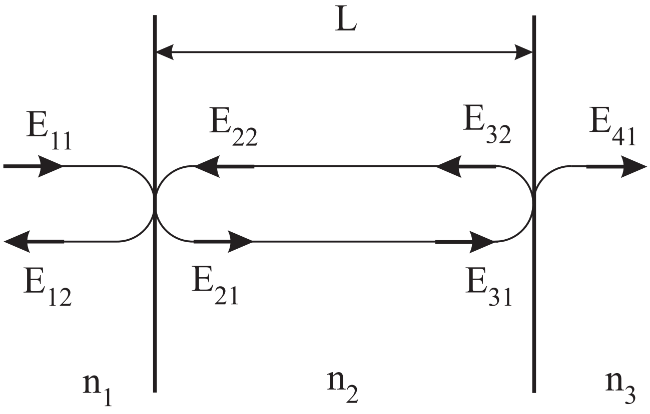

Abbildung 8.2: Fabry Perot Etalon. Die hin- und rücklaufenden Wellen an den jeweiligen Grenzflächen sind durch Pfeile angedeutet.

Die Extrema lassen sich aus $|r|^2$ bestimmen, analytisch allerdings nur für den Fall senkrechten Einfalls und bei verlustfreien Medien.

d) Wie groß ist $|r|^2$ allgemein und im Fall senkrechter Inzidenz?

e) Wie groß sind die Extremwerte von $|r|$ und die zugehörigen Abstände L bei senkrechtem Einfall und verlustfreien Medien?

f) Welche Kombination von L, n_1, n_2 und n_3 ist erforderlich, damit $|r|$ in diesem Fall verschwindet?

Aufgabe 8.2.6

Für Laser werden teilweise Spiegel mit sehr hoher Reflektivität ($R \geq 99\%$) benötigt. Dies wird mit Bragg-Reflektoren erreicht. Sie bestehen aus alternierenden Schichten hoher und niedriger Brechzahl, wie schematisch in Bild 8.3 dargestellt ist.

Innerhalb der Spiegel kommt es durch Mehrfachreflexion zu der Situation, dass vorwärts und rückwärts laufende Wellen von beiden Seiten auf eine Grenzfläche treffen. Die Brechung solcher Reflektoren wird durch die große Anzahl von beteiligten Wellen sehr schnell unübersichtlich. Die regelmäßige Struktur legt aber nahe, die Beschreibung der Grenzflächen

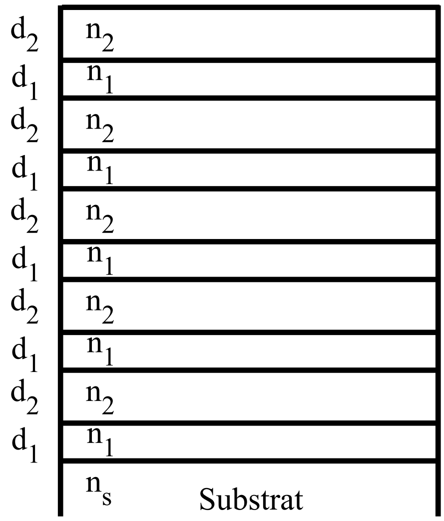

Abbildung 8.3: Schematischer Aufbau eines Braggreflektors. Die beteiligten Schichten haben immer eine optische Dicke von $\lambda/4$ entsprechend der geometrischen Dicke $\lambda/4n$.

zwischen zwei Medien und das Verhalten der Wellen in den Medien selbst mit den Matrizen D (von englisch Diffraction) und P (von englisch Propagation) zu beschreiben und das Gesamtverhalten der Struktur über Matrixmultiplikationen zu bestimmen. Diese Methode ist auch als Transfermatrixmethode bekannt.

Zur Herleitung der P- und D-Matrizen für verschiedene Polarisationen bezüglich der Grenzfläche wird angenommen, dass sich die Wellen in der n-t-Ebene des $nt\ell$-Koordinatensystems [1] ausbreitet, wobei n senkrecht zur Grenzfläche steht. Die Bereiche zwischen den Grenzflächen seien in n-Richtung steigend durchnummeriert, links der ersten Grenzfläche ($n = n_0$) beginnend mit $j = 0$.

Wir betrachten zunächst die Grenzfläche zwischen Bereich j und $j + 1$. Die Wellen seien TE polarisiert. Das elektrische Feld habe die Amplitude $\tilde{E}$. Da die Randbedingungen an der Grenzfläche die Stetigkeit der tangentialen Komponenten von $\vec{k}$ verlangen, beschränken wir uns bei der Beschreibung des elektrischen Feldes $\vec{E} = \tilde{E}\exp\{i(\omega t - \vec{k}(\vec{r} - \vec{r}'))\}\vec{e}_\ell$ auf die Darstellung $E_{j1}\{n\} = \tilde{E}_{j1}\exp\{-ik_{jn}(n - n_j)\}$ für die vorwärts laufende und $E_{j2}\{n\} =$

[1] t, ℓ und n stehen für transversal, lateral und normal, wobei t nicht mit der Zeit zu verwechseln ist. Die transversalen und lateralen Komponenten sind tangential zur Grenzfläche.

$\tilde{E}_{j2}\exp\{ik_{jn}(n-n_j)\}$ für die rückwärts laufende ebene Welle im Bereich j, wobei $k_{jn} = \vec{k}_j\vec{e}_n$ die Normalenkomponente des Wellenzahlvektors ist.

Wird nun speziell die Grenzfläche zwischen den beiden Bereichen $j = 1$ betrachtet, kann weiter abgekürzt werden mit $A_1 = E_{j1}n = n_j$ bzw. $B_1 = E_{j2}n = n_j$ sowie $A_2 = E_{j+11}n = n_j$ und $B_{j+1} = E_{j+12}n = n_j$, wie es in der Literatur zu finden ist.

a) Skizzieren Sie die Situation an der Grenzfläche $n = n_j$ mit den Wellen A_1, B_1, A_2 und B_2.

b) Wie lauten die Ansätze für die Wellenzahlvektoren $\vec{k}_{11}$, $\vec{k}_{12}$, $\vec{k}_{21}$ und $\vec{k}_{22}$? Welche Bedingungen müssen die Wellenzahlvektoren erfüllen?

c) Welche magnetischen Felder resultieren aus den elektrischen Feldern an der Grenzfläche?

d) Wie lauten die Randbedingungen für die Felder bei $n = 0$?

e) Formen Sie die Randbedingungen so um, dass auf der linken Seite nur Feld- und Materialparameter aus Bereich 1 und auf der rechten Seite nur aus Bereich 2 stehen. Kürzen Sie so weit wie möglich.

Die Felder werden zu Vektoren $\vec{E}_1\{t,\ell,n_1\} = \vec{E}_1\{n_1\} = (E_{11}\{n_1\}, E_{12}\{n_1\})^T = (A_1, B_1)^T$ und $\vec{E}_2\{n_1\} = (E_{21}\{n_1\}, E_{22}\{n_1\})^T = (A_2, B_2)^T$ zusammengefasst.

f) Wie lauten die Matrizen D_1 und D_2, wenn die Gleichungen aus e) in der Form $D_1\vec{E}_1\{0\} = D_2\vec{E}_2\{0\}$ geschrieben werden?

g) Wie lautet die Grenzflächenmatrix $D_{12} = D_1^{-1}D_2$ in der Schreibweise $\vec{E}_1\{0\} = D_{12}\vec{E}_2\{0\}$?

h) Wenn nur eine Welle aus dem Bereich 1 auf die Grenzfläche fällt, ist $E_{22}\{0\} = 0$. Wie groß sind der Reflexionsfaktor $r_{12} = \frac{B_1}{A_1}$ und der Transmissionsfaktor $t_{12} = \frac{A_2}{A_1}$?

i) Schreiben Sie die Matrix D_{12} mit r_{12} und t_{12}. Bilden Sie einen Vorfaktor für die Matrix, so dass die Nebendiagonalelemente gleich ± 1 werden.

k) Wie lautet der komplexe Poyntingvektor der Wellen A_1, B_1 und A_2, wenn von rechts keine Welle einfällt ($B_2 = 0$)?

Die Grenzflächenmatrizen D_1 und D_2 ändern sich nur unwesentlich, wenn Wellen einfallen, die TM-polarisiert sind.

l) Wie lauten die Ansätze für die magnetischen Felder $\vec{H}$? Die Amplitude sei $|\vec{H}| = \tilde{H}$. Verwenden Sie wieder die Größen A und B analog zu dem Fall der TE-polarisierten Wellen.

m) Welche elektrischen Felder resultieren an der Grenzfläche?

n) Wie lauten die Gleichungen für die Felder nach Anwendung der Randbedingungen aus e)? Formen Sie die Gleichungen analog zu f) um und bringen Sie sie in die Form $D_{1H}\vec{H}_1\{0\} = D_{2H}\vec{H}_2\{0\}$.

o) Wie lautet die Grenzflächenmatrix D_{12H} unter Verwendung der Reflexions- und Transmissionsfaktoren r_{12H} und t_{12H} analog zu k)?

p) Berechnen Sie die komplexen Poyntingvektoren analog zu l).

Die Ausbreitung der Wellen in n-Richtung innerhalb eines Mediums $j = a$ wird durch die P-Matrix in der Form $\vec{E}_a\{n = n_1\} = P_a\{n_2 - n_1\}\vec{E}_a\{n = n_2\}$ beschrieben.

q) Skizzieren Sie die Situation.

r) Geben Sie die Matrizen $P_1\{d\}$ ($n_1 = -d$, $n_2 = 0$) und $P_2\{d\}$ ($n_1 = 0$, $n_2 = d$) an.

Aufgabe 8.2.7

Zur Entspiegelung von Brillengläsern wird eine dünne dielektrische Schicht aufgedampft. Die Anordnung kann durch das folgende Modell beschrieben werden.
Eine homogene ebene Welle mit $\vec{E}(z,t) = (E_0 \cdot \exp\{i(\omega \cdot t - k \cdot z)\}, 0, 0)^T$ bewegt sich in positive z-Richtung. Im Bereich $0 \leq z \leq d$ befindet sich eine in x-y-Richtung unendlich ausgedehnte dielektrische Platte (Fabry-Perot-Resonator oder Entspiegelungsschicht). Für

den Wellenwiderstand Z gilt dabei jeweils:

$$Z = \begin{cases} Z_1 & \text{für den Bereich 1 : } z \leq 0, & \text{(Luft)} \\ Z_2 & \text{für den Bereich 2 : } 0 \leq z \leq d, & \text{(Entspiegelungsschicht)} \\ Z_3 & \text{für den Bereich 3 : } z \geq d \quad . & \text{(Glas)} \end{cases}$$

Zur Lösung der Aufgabe soll auf die in Aufgabe 8.2.6 vorgestellte 2×2-Matrizenmethode zurückgegriffen werden.

a) Skizzieren Sie die Situation. Tragen Sie alle vorkommenden elektrischen Felder an den Grenzflächen bei $z = 0$ und $z = d$ ein.

b) Wie lauten die Matrizen der Grenzflächen für die elektrischen Felder bei $z = 0$ und $z = d$?

c) Wie hängen die elektrischen Felder bei $z = 0$ und $z = d$ miteinander zusammen? Verwenden Sie die Matrizenform $\vec{E}_2\{d\} = P\{d\}\vec{E}_2\{0\}$

d) Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Feldern $\vec{E}_1$ bei $z = 0$ im Medium 1 und $\vec{E}_3\{d\}$ bei $z = d$ im Medium 3?

e) Welcher Reflexionsfaktor $r = \frac{E_{12}\{0\}}{E_{11}\{0\}}$ resultiert aus der Bedingung, dass keine Welle aus Medium 3 auf die Struktur fällt?

f) Welche Dicke d muss Medium 2 haben, damit der Reflexionsfaktor verschwindet.

8.3 Skalare Beugungstheorie

Aufgabe 8.3.1

Ein Laser emittiert bei der Wellenlänge λ. In welcher Entfernung sind die Fernfeldbedingungen für Aufpunkte im Abstand $r = a \cdot \lambda$ von der Achse erfüllt? Der Radius r_0 der emittierende Fläche ist klein gegen r, er ist in der Größenordnung der Emissionswellenlänge λ. (Hinweis: Bei einer Emissionswellenlänge von typisch etwa $1\,\mu\mathrm{m}$ ist der Durchmesser der emittierende Fläche weniger als $1\,\mu\mathrm{m}$ groß. Für Aufpunkte im Abstand von $1\,\mathrm{cm}$ von der Achse ist $a > 10^4$!).

Aufgabe 8.3.2

Eine sich in z-Richtung ausbreitende und in x-Richtung linear polarisierte ebene Welle treffe auf einen rechteckförmigen Ausschnitt einer ansonsten unendlich ausgedehnten Metallfolie, so dass die Feldverteilung in der Ebene $z = 0$ durch

$$E_x(x, y, z = 0) = \begin{cases} E_0 & \text{für} \quad -a \leq x \leq a \quad \text{und} \quad -b \leq y \leq b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben wird.

a) Wie lautet das Raumfrequenzspektrum der Feldverteilung bei $z = 0$?

b) Wie lautet die Bedingung für die Fresnel-Näherung?

c) Berechnen Sie die Feldstärke bei $z > 0$ in der Fraunhofer-Näherung.

In den obigen Ausschnitt wird nun eine dielektrische Platte mit in x-Richtung periodisch variierendem Absorptionskoeffizienten eingesetzt, welche eine Feldverteilung

$$E_x(x, y, z = 0) = \begin{cases} E_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi K x\right) & \text{für} \quad -a \leq x \leq a \quad \text{und} \quad -b \leq y \leq b, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erzeugt.

d) Berechnen Sie auch für diesen Fall die Fernfeldverteilung.

e) Bei welchen Winkeln bezüglich der z-Achse sind die Intensitätsmaxima der gebeugten Wellen zu finden?

Aufgabe 8.3.3

Das Babinet'sche Theorem besagt, dass zwei komplementäre Strukturen (Loch in einer Wand — Scheibe) zu gleichen Beugungsmustern führen, bis auf einen kleinen Bereich um die z-

Achse.

Dies soll an Hand der Beugung an einem Streifen überprüft werden. Der Streifen befinde sich bei $z = 0, \quad -a < x < a, \quad -\infty < y < \infty$ und schattet einen Teil einer ebenen Welle mit einer Wellenlänge $\lambda = \lambda_0 \pm \Delta\lambda$ ab. Die einfallende Welle soll in x-Richtung eine endliche Ausdehnung haben, was durch

$$\vec{E} = \hat{E} \cdot \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| \leq A \\ 0 & \text{für} \quad |x| > A \end{cases}$$

beschrieben werden kann, wobei $A \gg a$ angenommen wird.

Betrachten Sie zunächst nur die Wellenlänge $\lambda = \lambda_0$!

a) Wie lautet das exakte Beugungsintegral allgemein?

b) Wie lautet das Beugungsintegral in Fresnelnäherung? Was besagt die Fresnelnäherung?

c) Setzen Sie die Feldverteilung inclusive der Integrationsgrenzen ein.

Das Integral in y-Richtung kann an dieser Stelle berechnet werden:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z}\left[y - y_0\right]^2\right\}\, \mathrm{d}y_0 \quad = \quad \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{i\frac{\pi}{2}y_0^2\right\}\, \mathrm{d}y_0 \quad =$$

$$\sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\left\{\frac{\pi}{2}y_0^2\right\} + i\sin\left\{\frac{\pi}{2}y_0^2\right\}\, \mathrm{d}y_0 \quad \overset{\text{Fresnelintegrale}}{=} \quad \sqrt{\frac{\lambda z}{2}}\left[1 + i\right] \quad = \quad \sqrt{i\lambda z}$$

(Bemerkung: Vergleichen Sie dies mit dem Vorfaktor der Beugungsintegrale.)

d) Wie lautet das Beugungsintegral in Fraunhofernäherung?

e) Wie lauten die Bedingungen, um die Fraunhofernäherung anwenden zu dürfen? (Wenden Sie die Fraunhofernäherung trotzdem an!)

f) Wie lautet das Feld an einer Stelle $z \gg 0$.

g) Welcher Term in obigem Ergebnis hat eine sehr feine Beugungsstruktur?

h) Betrachten Sie diesen Term genauer. Wenn Sie kleine Variationen der Wellenlänge zulassen, mittelt sich dieser Anteil fast für jeden Ort weg, wo ist dies nicht der Fall? (keine Rechnung!)

i) Wie sieht die komplementäre Anordnung zum Streifen aus?

k) Wie lautet das Feld der komplementären Beugungsstruktur?

l) Berechnen Sie die Summe der beiden Beugungsfelder.

Kapitel 9

Wellenausbreitung in elektrischen Leitern

9.4 Eindringtiefe und Skineffekt

Aufgabe 9.4.1

Transformatorkerne werden meist aus vielen aufeinander geschichteten Blechen der Dicke d hergestellt. Da die Blechdicke klein gegenüber den sonstigen Abmessungen des Transformators ist, kann man die Bleche als unbegrenzt ausgedehnte ebene Metallplatten idealisieren. Das magnetische Wechselfeld ist parallel zu den Blechen orientiert. Die Bleche haben die Leitfähigkeit σ und die Permeabilität μ, die komplexe magnetische Feldstärke ist gemäß Bild 9.1 $\vec{H}_0\{x = d/2\} = H_0 \exp\{i\omega t\}\vec{e}_y$. Die Verschiebungsstromdichte wird hier vernachlässigt.

a) Berechnen Sie das komplexe magnetische Feld im Inneren der Platte.

b) Welche Wirbelstromdichte herrscht in der Platte?

c) Durch die Fläche $d \cdot l$ strömt der reelle magnetische Fluss Φ. Wie groß ist die wirksame Permeabilität $\mu_w = \frac{\Phi}{d \cdot l \cdot H_0}$?

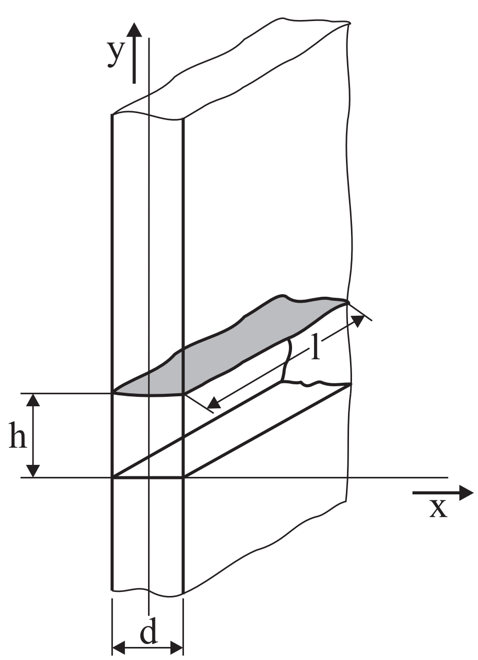

Abbildung 9.1: Transformatorblech im homogenen Magnetfeld.

Kapitel 10

Wellenausbreitung in Wellenleitern

10.2 Rechteckhohlleiter

Aufgabe 10.2.1

Sie haben zwei Rechteckhohlleiter mit den Querschnittsabmessungen a_1 , b_1 und a_2 , b_2 sowie der Länge L. Es sollen Signale der Frequenz f durch die Wellenleiter übertragen werden. Wählen Sie die Abmessungen der Wellenleiter so, dass jeweils nur eine Eigenwelle ausbreitungsfähig ist. Die Signale sollen am Ende der beiden Wellenleiter eine Phasenverschiebung von π zueinander aufweisen. Die Länge der Hohlleiter soll dabei minimal bleiben. Die Wellenleiter seien mit Luft gefüllt.

a) Wie lauten die Grenzfrequenzen für die Eigenwellen in den Hohlleitern?

b) In welchem Frequenzbereich müssen die Hohlleiter betrieben werden, damit sich in jedem nur eine Eigenwelle ausbreitet?

c) Wie muss das Verhältnis der Abmessungen gewählt werden, wenn der Einmodigkeitsbereich maximal groß werden soll?

d) Was resultiert daraus für die Abmessungen bei gegebener Betriebsfrequenz.

e) Wie lauten die Ausbreitungskonstanten in z-Richtung in beiden Wellenleitern für die

Grundwelle?

f) Welche Phasenverschiebung zwischen den Eigenwellen der beiden Hohlleiter resultiert am Ende bei gleichphasiger Einspeisung?

g) Welche Bedingung muss an die Ausbreitungskoeffizienten gestellt werden, damit die Phasenverschiebung maximal wird?

h) Welche minimale Länge müssen die Hohlleiter aufweisen?

10.5 Rundhohlleiter

Aufgabe 10.5.1

Der Wellenwiderstand eines Kabels wird aus dem Längswiderstandsbelag $Z' = R' + i\omega L'$ und dem Querleitwertsbelag $Y' = G' + i\omega C'$ mit $Z = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}}$ berechnet. Die Widerstands- und Leitwertsbeläge können in erster Näherung mit den aus der Elektro- und Magnetostatik bekannten Belägen ersetzt werden. Dabei ist der ohmsche Widerstandsbelag R' einfach der längenbezogene Widerstand des Hin- und Rückleiters. Er kann üblicherweise vernachlässigt werden. Gleiches gilt für den längenbezogenen ohmschen Leitwert (Leitwertbelag G') zwischen Hin- und Rückleiter, wenn der Betrieb bei nicht zu hohen Frequenzen stattfindet und das Dielektrikum noch nahezu ideal isoliert. Die längenbezogene Kapazität (Kapazitätsbelag C') zwischen Hin- und Rückleiter und die längenbezogene Induktivität der Anordnung von Hin- und Rückleiter (Induktivitätsbelag L') bestimmen dann letztendlich den Wellenwiderstand Z. Die Induktivität L ist der Proportionalfaktor zwischen Strom und dem durch ihn erzeugten magnetischen Fluss $\Phi = \int \vec{B} \mathrm{d}\vec{A} = L \cdot I$ zwischen dem Hin- und Rückleiter.

Der Außenleiter eines Koaxialkabels nach Bild 10.1 habe den Durchmesser D, die relative Dielektrizitätszahl der Isolation ist ϵ. Das Kabel soll den Wellenwiderstand Z aufweisen. Welcher Durchmesser d muss für den Innenleiter gewählt werden?

a) Berechnen Sie den Kapazitätsbelag C' eines Koaxialkabels mit Innendurchmesser d und Außendurchmesser D.

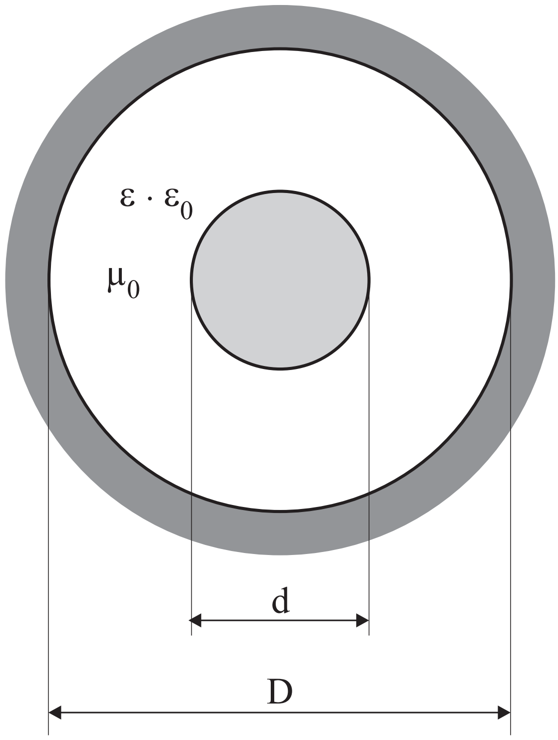

Abbildung 10.1: Querschnitt durch ein Koaxialkabel.

b) Berechnen Sie den Induktivitätsbelag des Koaxialkabels.

c) Berechnen Sie den erforderlichen Innendurchmesser, damit der Wellenwiderstand Z bei gegebenen Außendurchmesser D wird.

Kapitel 12

Fernzone spezieller Quellverteilungen

12.3 Hertzsche Vektoren

Aufgabe 12.3.1

Ein Sender der Leistung P steht in einer Entfernung von L und der Höhe h über dem Empfangsort (z.B. Fernsehsender bei Ermingen: 300 kW, 10 km von Ulm, Höhe 150m über dem Empfangsort). Die Frequenz des Sender ist f (= 145 MHz). Nehmen Sie an, dass der Sendedipol ein einziger Dipol mit senkrechter Orientierung ist. Die Fernfeldbedingungen seien erfüllt. (Sind sie es im vorliegenden Zahlenbeispiel?)

a) Welche magnetische und elektrische Feldstärke werden am Empfangsort gemessen?

b) Welche Empfangsleistung resultiert daraus?

c) Welche maximale Sendefeldstärke herrscht am Dipol und welches maximale Dipolmoment weist er auf?

Aufgabe 12.3.2

Im Abstand h über einer leitenden Ebene befindet sich ein elektrischer Dipol. Die Ebene soll hier mit der $x - y-$ Ebene bei $z = 0$ zusammenfallen. Der Dipol ist in $z-$ Richtung ausgerichtet und hat das Dipolmoment

$$\vec{p} = p_0 \exp\{i\omega t\}\vec{e}_z.$$

Gesucht ist das Fernfeld in der Fraunhofer- Näherung. Zur Lösung dieser Aufgabe gehen Sie wie folgt vor.

a) Ersetzen Sie die Wirkung der ideal leitenden Ebene auf das elektrische Feld des Dipols durch einen zweiten Dipol (Spiegelungsmethode). Welche Orientierung muss der Spiegeldipol bezüglich des Originaldipols haben?

b) Welche Näherungen werden in der Fraunhofer- Darstellung des Fernfeldes gemacht?

c) Geben Sie das Fernfeld in Fraunhofer- Näherung an.