ulm university universität ulm

Formelsammlung

für die Vorlesung

Elektromagnetische Felder und Wellen

Matthias Weber

WS 2004/2005

zuletzt überarbeitet am
10. März 2007

Alle Angaben ohne Gewähr

Bei Fehlern, Kritik, Anregungen und Lob:
mat_web@web.de

© 2005-2007 Matthias Weber, Ulm

Inhaltsverzeichnis

Hinweise:

- Die vorliegende Formelsammlung umfasst alle Themengebiete der Vorlesung 'Elektromagnetische Felder und Wellen', wie sie seit Inkrafttreten der DPO 2001 behandelt werden.
  Darüber hinaus gehende Stoffgebiete, die früher (vor der DPO 2001) Teil der Vorlesung waren und noch immer im (vollständigen) Skript enthalten sind, wurden beim Erstellen der Formelsammlung nicht berücksichtigt.

- Aufgrund des immensen Stoffumfangs der Vorlesung, hat auch die vorliegende Formelsammlung eine etwas unhandliche Größe.
  Um Formeln trotzdem möglichst schnell aufzufinden, verfügt das Dokument über ein ausführliches Inhaltsverzeichnis.
  Weil man sich in einer Formelsammlung mit 46 Seiten und 291 Formeln trotzdem schwer auf Anhieb zurecht findet, sollte ein Teil der Prüfungsvorbereitung darin bestehen das Vorlesungsskript und die Formelsammlung zusammen durchzuarbeiten. Nur so lässt sich der zum Rechnen von Prüfungsaufgaben notwendige Überblick über die Fülle der zusammengetragenen Formeln erreichen.

- Im vorliegenden Dokument werden keine Formeln hergeleitet, da dies nicht Aufgabe einer Formelsammlung ist. Bei einigen wenigen Formeln wird allerdings kurz darauf hingewiesen, woher die Formel kommt. Dies ist meistens nur dann der Fall, wenn dieses Wissen zum Verständnis der Formel nötig ist.

- Da in einem Abschnitt der Formelsammlung meistens eine Vielzahl von verschiedenen Formeln aufgeführt wird, werden die wichtigsten Zusammenhänge zu Gunsten der Übersichtlichkeit immer eingerahmt.

- Die vorliegende Formelsammlung hält sich bei ihren Bezeichnungen größtenteils an das Vorlesungsskript. Lediglich in einigen wenigen Fällen weicht die Formelsammlung von den Bezeichnungen des Skripts ab.
  Dies ist immer dann der Fall, wenn nach Meinung des Autors, die im Skript verwendeteten Bezeichnungen verwirrend oder unlogisch gewählt wurden und eine bessere Bezeichnung möglich war.
  Als Beispiel dienen hier die beiden Integralsätze von Stokes und Gauß. In beiden Sätzen taucht ein beliebiges Vektorfeld auf, dass jedoch im Vorlesungsskript das eine Mal mit $\vec{T}$ und das andere Mal mit $\vec{C}$ bezeichnet wird. Die vorliegende Formelsammlung hingegen bezeichnet beliebige Vektorfelder immer mit $\vec{T}$, unter anderem auch um Verwechslungen mit der beliebigen, geschlossenen Kurve C zu vermeiden.

- Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Größen (wie zum Beispiel beim E-Feld, welches vom jeweiligen Ortsvektor $\vec{r}$ abhängt) werden durch geschweifte Klammern gekennzeichnet (also $\vec{E}\{\vec{r}\}$).
  Dies geschieht analog zum Vorlesungsskript und im Gegensatz zum häufigen Gebrauch von runden Klammern in der gängigen Literatur.
  Wie auch im Vorlesungsskript werden diese Abhängigkeiten aus Platz- und Übersichtlichkeitsgründen jedoch nicht immer ausgeschrieben. Davon sollte sich der Leser jedoch nicht verwirren lassen. Beispielsweise handelt es sich bei $\varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E}\{\vec{r}\} = \varrho_V\{\vec{r}\}$ und $\varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E} = \varrho_V$ lediglich um zwei verschiedene Schreibweisen für eine einzige Formel.

1 Bezeichnungen

1.1 In Kapitel 2 eingeführte Größen und Bezeichnungen

$\vec{a} \circ \vec{b}$ = Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$\vec{a} \times \vec{b}$ = Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$\frac{\partial}{\partial t}$ = Partielle Ableitung nach der Zeit
$\frac{\partial}{\partial x}$ = Partielle Ableitung nach x (analog für y, z, ϕ, θ, oder ähnliches)

$\vec{e}_x$ = Einheitsvektor in x-Richtung (analog für ϕ, θ, oder ähnliches)
$\vec{e}_y$ = Einheitsvektor in y-Richtung (analog für ϕ, θ, oder ähnliches)
$\vec{e}_z$ = Einheitsvektor in z-Richtung (analog für ϕ, θ, oder ähnliches)

$\|\vec{k}\| = k$ = Norm des Vektors $\vec{k}$
$|\vec{k}|$ = Betrag des Vektors $\vec{k}$
$\vec{k}^*$ = konjugiert komplexer Vektor $\vec{k}$

$d^3r = dV$ = Volumenelement
$d^2\vec{S}$ = Flächenelement (Normalenvektor der Fläche S_V)
$d\vec{l}$ = Linienelement der Kurve C

$\vec{r}\,'$ = Quellpunkt (Punkte, an denen sich Ladungen befinden)
$\vec{r}$ = Aufpunkt (Punkte, an denen eine bestimmte Größe berechnet werden soll)

i = imaginäre Einheit

1.2 In Kapitel 3 eingeführte Größen und Bezeichnungen

V = Volumen V
S = Fläche S
C = beliebige, in sich geschlossene Kurve C

S_V = Fläche, die vom Volumen V begrenzt wird
S_C = Fläche, die von der Kurve C umschlossen wird

$\vec{T}$ = beliebige Vektorfunktion

$\vec{F}$ = Kraft
$\vec{E}$ = Elektrische Feldstärke
Q = Ladung
Q_V = Ladung innerhalb des Volumens V
$\frac{Q_S}{t}$ = Ladung Q, die in der Zeit t durch die Fläche S hindurchtritt

ε_0 = Dielektrizitätszahl des Vakuums
μ_0 = Permeabilität des Vakuums

ϱ_V = Raumladungsdichte

$\vec{j}_V$ = Volumenstromdichte
$\vec{j}_D$ = Verschiebungsstromdichte

I = Stromstärke
I_C = Strom, der durch die von der Kurve C berandete Fläche fließt

$\vec{B}$ = Magnetische Induktion
$\vec{A}$ = Magnetisches Vektorpotenzial

emf = Elektromotorische Kraft

$\vec{v}$ = Geschwindigkeit

1.3 In Kapitel 4 eingeführte Größen und Bezeichnungen

W_{pot} = Potentielle Energie

V = Elektrisches Potential
U = Elektrische Spannung

$\vec{n}$ = Normalenvektor

ϱ_V = Raumladungsdichte
ϱ_S = Flächenladungsdichte
ϱ_L = Linienladungsdichte
ϱ_{frei} = Raumladungsdichte der freien Ladungsträger
ϱ_P = Polarisationsraumladungsdichte

Q_{frei} = Ladung der freien Ladungsträger

σ = Leitfähigkeit

$\vec{p}$ = Dipolmoment
$\vec{P}$ = Elektrische Polarisation

$\vec{D}$ = Dielektrische Verschiebung

χ_e = Elektrische Suszebtibilität
ε = Relative Dielektrizitätszahl

C = Kapazität
R = Ohmscher Widerstand

S = Fläche der Platten eines Plattenkondensators
d = Abstand der Platten eines Plattenkondensators

w_{el} = Elektrische Energiedichte

1.4 In Kapitel 5 eingeführte Größen und Bezeichnungen

$\vec{m}$ = Magnetisches Dipolmoment
$\vec{M}$ = Magnetisierung

$\vec{L}$ = Drehimpuls
$\overline{m}$ = Masse
q = Elementarladung

$\vec{j}_V$ = Volumenstromdichte
$\vec{j}_S$ = Flächenstromdichte
$\vec{j}_{\mathrm{Pol}}$ = Polarisationsstromdichte
$\vec{j}_{\mathrm{magn}}$ = Magnetisierungsstromdichte
$\vec{j}_{\mathrm{frei}}$ = Stromdichte der freien Ladungsträger

$\vec{A}$ = Magnetisches Vektorpotential
$\vec{A}_{\mathrm{magn}}$ = Beitrag der Magnetisierungsstromdichte zum Vektorpotential
$\vec{A}_{\mathrm{frei}}$ = Beitrag der freien Stromdichte zum Vektorpotential

$\vec{H}$ = Magnetfeld

χ_m = Magnetische Suszebtibilität
μ = Relative Permeabilität

Φ_M = Skalares magnetisches Potential

w_{magn} = Magnetische Energiedichte

1.5 In Kapitel 6 eingeführte Größen und Bezeichnungen

$\vec{n}$ = Normalenvektor

E_{tan} = Tangentialkomponente des E-Feldes (analog für $\vec{D}$, $\vec{B}$ und $\vec{H}$)
E_{norm} = Normalenkomponente des E-Feldes (analog für $\vec{D}$, $\vec{B}$ und $\vec{H}$)

Φ_{el} = Skalares elektrisches Potential

Λ = Eichfunktion

Ψ = Variable in der Wellengleichung (Platzhalter für andere Größen)
g = Variable in der Wellengleichung (Platzhalter für andere Größen)

c = Lichtgeschwindigkeit
c_0 = Vakuumlichtgeschwindigkeit

n = Brechzahl

k_0 = Vakuumwellenzahl
k = Wellenzahl
$\vec{k}$ = Wellenvektor
$\vec{e}_k$ = Einheitswellenvektor

ω = Kreisfrequenz

1.6 In Kapitel 7 eingeführte Größen und Bezeichnungen

Z = Wellenwiderstand

$\text{Re}\{...\}$ = Realteil einer Funktion

t = Zeit
φ = Nullphase

$\vec{E}_0$ = Amplitudenvektor des E-Feldes (analog für das H-Feld)
E_0 = Amplitude des E-Feldes (analog für das H-Feld)
$E_{0\text{x}}$ = Amplitude des E-Feldes in x-Richtung (analog für $\vec{H}$)
$E_{0\text{y}}$ = Amplitude des E-Feldes in y-Richtung (analog für $\vec{H}$)
$E_{0\text{z}}$ = Amplitude des E-Feldes in z-Richtung (analog für $\vec{H}$)

δ = Phasenunterschied

w = Elektrostatische Energiedichte
w_{mech} = Mechanische Leistungsdichte

$\vec{S}$ = Poynting-Vektor
$\overline{\vec{S}}$ = zeitgemittelter Poynting-Vektor
$\vec{S}_0$ = komplexer Poynting-Vektor

c_{gr} = Grupengeschwindigkeit
c_{ph} = Phasengeschwindigkeit
β = Ausbreitungskoeffizient

$\vec{k}_{\text{in}}$ = Einfallender Wellenvektor (analog für $\vec{H}$ und $\vec{E}$)
$\vec{k}_{\text{ref}}$ = Reflektierter Wellenvektor (analog für $\vec{H}$ und $\vec{E}$)
$\vec{k}_{\text{tr}}$ = Transmittierter Wellenvektor (analog für $\vec{H}$ und $\vec{E}$)

φ_{ref} = Winkel der reflektierten Welle gegenüber der Einfallsebene
φ_{tr} = Winkel der transmittierten Welle gegenüber der Einfallsebene

θ_{in} = Winkel der einfallenden Welle gegenüber dem Einfallslot
θ_{ref} = Winkel der reflektierten Welle gegenüber dem Einfallslot
φ_{tr} = Winkel der transmittierten Welle gegenüber dem Einfallslot

r = Reflexionsfaktor
t = Transmissionsfaktor

R = Intensitätsreflexionsfaktor
T = Intensitätstransmissionsfaktor

θ_{iB} = Brewster-Winkel
θ_{gr} = Grenzwinkel der Totalreflexion

2 Mathematische Grundlagen

Im folgenden Kapitel gilt:

f sei eine skalare Funktion.

$\vec{A}$ sei beliebige eine Vektorfunktion $\left(\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}\right)$.

2.1 Das Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \tag{1}$$

Das Skalarprodukt zweier orthogonaler Vektoren gibt 0.

2.2 Das Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix} \tag{2}$$

Vorausgesetzt die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ haben alle den Betrag 1 und bilden ein Rechtssystem (das heißt alle 3 Vektoren stehen senkrecht aufeinander), so gilt:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} \qquad \text{und} \qquad \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c} \tag{3}$$

2.3 Gradient

Der Gradient ∇ ist gleichbedeutend mit:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{4}$$

2.4 Divergenz

2.4.1 Divergenz (Gradient) einer skalaren Funktion

$$\nabla f = \frac{\partial}{\partial x}f\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}f\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}f\vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}f \\ \frac{\partial}{\partial y}f \\ \frac{\partial}{\partial z}f \end{pmatrix} \tag{5}$$

Wendet man den Gradienten auf eine skalare Funktion an, ergibt sich eine Vektorfunktion.

2.4.2 Divergenz einer Vektorfunktion

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \circ \vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z \tag{6}$$

Wendet man den Gradienten auf eine Vektorfunktion an, ergibt sich eine skalare Funktion.

Ein Feld ist divergenz-, oder **quellenfrei**, wenn gilt:

$$\nabla \circ \vec{A} = 0 \tag{7}$$

2.5 Rotation

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\vec{e}_z =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}A_z - \frac{\partial}{\partial z}A_y \\ \frac{\partial}{\partial z}A_x - \frac{\partial}{\partial x}A_z \\ \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x \end{pmatrix} \tag{8}$$

Die Rotation einer Vektorfunktion ergibt wiederum eine Vektorfunktion.

Ein Feld ist rotations-, oder **wirbelfrei**, wenn gilt:

$$\nabla \times \vec{A} = 0 \tag{9}$$

2.6 Laplace

2.6.1 Laplace einer skalaren Funktion

$$\Delta f = (\nabla \circ \nabla) f = \frac{\partial^2}{\partial x^2}f + \frac{\partial^2}{\partial y^2}f + \frac{\partial^2}{\partial z^2}f \tag{10}$$

Laplace einer skalaren Funktion ergibt wiederum eine skalare Funktion.

2.6.2 Laplace einer Vektorfunktion

$$\Delta \vec{A} = (\nabla \circ \nabla)\vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_x \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_y \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}A_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2}A_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2}A_z \end{pmatrix} \tag{11}$$

Laplace einer Vektorfunktion ergibt wiederum eine Vektorfunktion.

2.7 Häufig benutzte Rechenregeln

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \circ \vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{12}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{13}$$

$$\nabla \circ (\nabla \times \vec{A}) = 0 \tag{14}$$

$$\nabla \circ (f\vec{A}) = f\ \nabla \circ \vec{A} + \vec{A} \circ \nabla f \tag{15}$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) = f\ \nabla \times \vec{A} + (\nabla f) \times \vec{A} \tag{16}$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \tag{17}$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B})\vec{A} - (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} \tag{18}$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \tag{19}$$

2.8 Norm eines Vektors

Die Norm eines Vektors ist folgendermaßen definiert:

$$\|\vec{k}\|^2 = k^2 = \vec{k} \circ \vec{k} \tag{20}$$

Im Gegensatz dazu ist der Betrag eines Vektors gegeben durch:

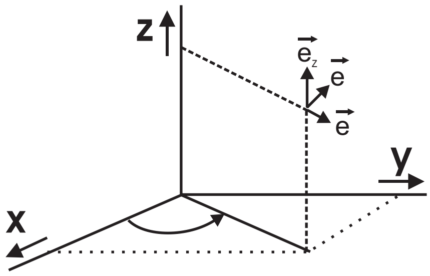
$$|\vec{k}|^2 = \vec{k} \circ \vec{k}^* \tag{21}$$

mit dem komplex konjugierten Vektor $\vec{k}^*$.

2.9 Zylinderkoordinaten $(x, y, z \Leftrightarrow \rho, \phi, z)$

Hinweis:
Sowohl bei den Zylinderkoordinaten, als auch bei den Kugelkoordinaten dient der griechische Buchstabe Phi als Abkürzung für die Azimutalkomponente.
Zur besseren Unterscheidbarkeit der beiden speziellen Koordinatensysteme werden zwei verschiedene Schreibweisen für den Buchstaben Phi verwendet.
Bei den Zylinderkoordinaten wird die Azimutalkomponente also mit ϕ, bei den Kugelkoordinaten mit φ bezeichnet.

2.9.1 Definitionsbereich der Zylinderkoordinaten



Der Definitionsbereich ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} 0 &\le \rho < \infty, && \text{Radialkomponente} \\ 0 &\le \phi \le 2\pi, && \text{Azimutalkomponente} \\ -\infty &< z < \infty, && \text{Longitudinalkomponente} \end{aligned}$$

2.9.2 Beziehungen zwischen kartesischen Koordinaten und Zylinderkoordinaten

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{22}$$

$$x = \rho \cdot \cos\{\phi\} \tag{23}$$

$$y = \rho \cdot \sin\{\phi\} \tag{24}$$

$$z = z \tag{25}$$

$$\cos\{\phi\} = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{26}$$

$$\sin\{\phi\} = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{27}$$

2.9.3 Das vektorielle Linienelement

$$d\vec{l} = d\rho\ \vec{e}_\rho + \rho\ d\phi\ \vec{e}_\phi + dz\ \vec{e}_z \tag{28}$$

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2 \tag{29}$$

2.9.4 Die Flächenelemente

$$d^2\vec{S} = \begin{cases} \rho\ d\phi\ dz\ \vec{e}_\rho & \text{auf den Flächen } \rho = \text{konstant}, \\ d\rho\ dz\ \vec{e}_\phi & \text{auf den Flächen } \phi = \text{konstant}, \\ \rho\ d\rho\ d\phi\ \vec{e}_z & \text{auf den Flächen } z = \text{konstant}. \end{cases} \tag{30}$$

2.9.5 Das Volumenelement

$$d^3\vec{r} = dV = \rho\ d\rho\ d\phi\ dz \tag{31}$$

2.9.6 Umrechnung in kartesische Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\{\phi\} & \sin\{\phi\} & 0 \\ -\sin\{\phi\} & \cos\{\phi\} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\{\phi\} & -\sin\{\phi\} & 0 \\ \sin\{\phi\} & \cos\{\phi\} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \tag{33}$$

2.9.7 Abstand zweier Punkte

Die Vektordifferenz $\vec{r}-\vec{r}'$ wird in Zylinderkoordinaten folgendermaßen berechnet:

$$\vec{r}-\vec{r}' = (\rho - \rho' \cos\{\phi-\phi'\}) \cdot \vec{e}_\rho + \rho' \sin\{\phi-\phi'\} \cdot \vec{e}_\phi + (z-z') \cdot \vec{e}_z \tag{34}$$

Somit ist der Abstand über folgende Beziehung gegeben:

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\{\phi-\phi'\} + (z-z')^2} \tag{35}$$

Das Betragsquadrat ergibt sich zu:

$$|\vec{r}-\vec{r}'|^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos\{\phi-\phi'\} + (z-z')^2 \tag{36}$$

2.9.8 Spezielle Beziehungen bei Zylinderkoordinaten

$$\nabla \cdot V = \mathrm{grad} V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \phi}\vec{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \nabla \circ \vec{B} = \mathrm{div}\vec{B} &= \frac{1}{\rho}B_\rho + \frac{\partial}{\partial \rho}B_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}B_\phi + \frac{\partial}{\partial z}B_z \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}B_\phi + \frac{\partial}{\partial z}B_z \\ &= \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\rho) + \frac{\partial}{\partial \phi}B_\phi + \frac{\partial}{\partial z}(\rho B_z)\right] \end{aligned} \tag{38}$$

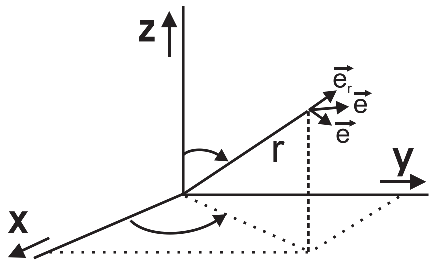
$$\begin{aligned} \nabla \circ \nabla \cdot V = \Delta V &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}V + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}V + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial \rho}V\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{B} &= \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}B_z - \frac{\partial}{\partial z}B_\phi\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial}{\partial z}B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho}B_z\right]\vec{e}_\phi \\ &\quad + \left[\frac{1}{\rho}B_\phi + \frac{\partial}{\partial \rho}B_\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}B_\rho\right]\vec{e}_z \\ &= \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}B_z - \frac{\partial}{\partial z}B_\phi\right]\vec{e}_\rho + \left[\frac{\partial}{\partial z}B_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho}B_z\right]\vec{e}_\phi \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho B_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}B_\rho\right]\vec{e}_z \end{aligned} \tag{40}$$

$$\Delta\vec{B} = \left(\Delta B_\rho - \frac{1}{\rho^2}B_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \phi}B_\phi\right)\vec{e}_\rho + \left(\Delta B_\phi - \frac{1}{\rho^2}B_\phi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \phi}B_\rho\right)\vec{e}_\phi + \Delta B_z\vec{e}_z \tag{41}$$

2.10 Kugelkoordinaten $(x, y, z \Leftrightarrow \theta, \varphi, r)$

2.10.1 Defintionsbereich der Kugelkoordinaten



Der Definitionsbereich ist gegeben durch:

$0 \leq \theta \leq \pi$, Polarkomponente
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, Azimutalkomponente
$0 \leq r < \infty$, Radialkomponente

2.10.2 Beziehungen zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} && (42)\\
x &= r \cdot \sin\{\theta\} \cdot \cos\{\varphi\} && (43)\\
x &= r \cdot \sin\{\theta\} \cdot \sin\{\varphi\} && (44)\\
z &= r \cdot \cos\{\theta\} && (45)\\
r \cdot \vec{e}_r &= x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z && (46)\\
\cos\{\varphi\} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} && (47)\\
\sin\{\varphi\} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} && (48)\\
\cos\{\theta\} &= \frac{z}{r} && (49)\\
\sin\{\theta\} &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{r^2}} && (50)\\
\sin\{\theta\} \cos\{\varphi\} &= \frac{x}{r} && (51)\\
\sin\{\theta\} \sin\{\varphi\} &= \frac{y}{r} && (52)
\end{aligned}
$$

2.10.3 Das vektorielle Linienelement

$$d\vec{l} = dr\ \vec{e}_r + r\ \sin\{\theta\}\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi + r\ d\theta\ \vec{e}_\theta \qquad (53)$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2\ d\theta^2 + r^2 \sin^2\{\theta\}\ d\varphi^2 \qquad (54)$$

2.10.4 Die Flächenelemente

$$d^2\vec{S} = \begin{cases} r^2 \sin\{\theta\}\ d\theta\ d\varphi\ \vec{e}_r & \text{auf den Flächen } r = \text{konstant,} \\ r\ dr\ d\theta\ \vec{e}_\varphi & \text{auf den Flächen } \varphi = \text{konstant,} \\ r \sin\{\theta\}\ dr\ d\varphi\ \vec{e}_\theta & \text{auf den Flächen } \theta = \text{konstant.} \end{cases} \qquad (55)$$

2.10.5 Das Volumenelement

$$d^3\vec{r} = dV = r^2 \sin\{\theta\}\ dr\ d\varphi\ d\theta \qquad (56)$$

2.10.6 Umrechnung in kartesische Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\{\theta\}\cos\{\varphi\} & \sin\{\theta\}\sin\{\varphi\} & \cos\{\theta\} \\ \cos\{\theta\}\cos\{\varphi\} & \cos\{\theta\}\sin\{\varphi\} & -\sin\{\theta\} \\ -\sin\{\varphi\} & \cos\{\varphi\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} \tag{57}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\{\theta\}\cos\{\varphi\} & \cos\{\theta\}\cos\{\varphi\} & -\sin\{\varphi\} \\ \sin\{\theta\}\sin\{\varphi\} & \cos\{\theta\}\sin\{\varphi\} & \cos\{\varphi\} \\ \cos\{\theta\} & -\sin\{\theta\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} \tag{58}$$

2.10.7 Spezielle Beziehungen bei Kugelkoordinaten

$$\nabla \cdot V = \mathrm{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \tag{59}$$

$$\begin{aligned} \nabla \circ \vec{B} = \mathrm{div}\vec{B} &= \frac{2}{r}B_r + \frac{\partial}{\partial r}B_r + \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_\varphi + \frac{1}{r\tan\{\theta\}}B_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}B_\theta \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_\varphi + \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\{\theta\}B_\theta) \quad (60) \\ &= \frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\{\theta\}B_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(rB_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\{\theta\}B_\theta)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \circ \nabla \cdot V = \Delta V &= \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}V + \frac{\partial^2}{\partial r^2}V + \frac{1}{r^2\tan\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \theta}V + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}V \\ &\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\{\theta\}}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}V \qquad (61) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}V\right) + \frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\partial}{\partial \theta}V\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\{\theta\}}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{B} &= \left[\frac{1}{r\tan\{\theta\}}B_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}B_\varphi - \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_\theta\right]\vec{e}_r \\ &\quad + \left[\frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_r - \frac{1}{r}B_\varphi - \frac{\partial}{\partial r}B_\varphi\right]\vec{e}_\theta \\ &\quad + \left[\frac{1}{r}B_\theta + \frac{\partial}{\partial r}B_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}B_r\right]\vec{e}_\varphi \qquad (62) \\ &= \frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\{\theta\}B_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi}(rB_\theta)\right]\vec{e}_r \\ &\quad + \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}B_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\{\theta\}B_\varphi)\right]\vec{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}B_r\right]\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\vec{B} &= \left[\Delta B_r - \frac{2}{r^2}B_r - \frac{2}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\{\theta\}B_\theta) - \frac{2}{r^2\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_\varphi\right]\vec{e}_r \\ &\quad + \left[\Delta B_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_r + \frac{2\cos\{\theta\}}{r^2\sin^2\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_\theta - \frac{1}{r^2\sin^2\{\theta\}}B_\varphi\right]\vec{e}_\varphi \\ &\quad + \left[\Delta B_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}B_r - \frac{1}{r^2\sin^2\{\theta\}}B_\theta - \frac{2\cos\{\theta\}}{r^2\sin^2\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}B_\varphi\right]\vec{e}_\theta \qquad (63) \end{aligned}$$

2.11 Sonstiges

2.11.1 Lösungsansätze für Differentialgleichungen

Für die DGL

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + c \cdot V = 0 \tag{64}$$

eignet sich der folgende Lösungsansatz:

$$V = A \cdot \exp\{i\lambda x\} + B \cdot \exp\{-i\lambda x\} \tag{65}$$

2.11.2 Trigonometrische Funktionen und Hyperbelfunktionen

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{66}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{67}$$

2.11.3 Häufig benötigte Integrale

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin 2ax \tag{68}$$

$$\int \cos^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a}\sin 2ax \tag{69}$$

2.11.4 Imaginäre E-Funktionen

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{70}$$

Das heißt zum Beispiel:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i \tag{71}$$

3 Herleitung der Maxwellschen Gleichungen

3.1 Der Gaußsche Integralsatz

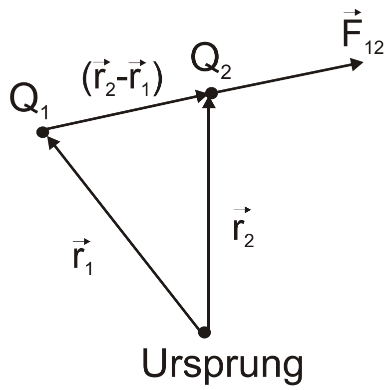
$$\iiint\limits_{V} \nabla \circ \vec{T}\{\vec{r}\}\ d^3r = \oiint\limits_{S_V} \vec{T}\{\vec{r}\} \circ d^2\vec{S} \tag{72}$$

3.2 Der Stokessche Integralsatz

$$\iint\limits_{S_C} \left(\nabla \times \vec{T}\{\vec{r}\}\right) \circ d^2\vec{S} = \oint\limits_{C} \vec{T}\{\vec{r}\} \circ d\vec{l} \tag{73}$$

Der Stokessche Integralsatz gilt nur dann, wenn das Vektorfeld über das integriert wird, keine Polstellen enthält.

3.3 Das Coulombsche Gesetz



Das **Coulombsche Gesetz** ist gegeben durch folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{\vec{F}_{12}\{\vec{r}\} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}} \tag{74}$$

Die Kraft $\vec{F}_{12}$ ist dabei die durch Q_1 auf Q_2 ausgeübte Kraft.
Die entgegengesetzte Kraft $\vec{F}_{21}$ auf Q_1 ist gleich groß, wie $\vec{F}_{12}$, hat aber ein negatives Vorzeichen.

Bei mehr als 2 Ladungen, ergibt sich die Gesamtkraft, durch Überlagerung, also Summieren der Einzelkräfte:

$$\boxed{\vec{F}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}} \tag{75}$$

3.3.1 Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern

Bei zeitabhängigen Feldern verliert das Coulombsche Gesetz seine Gültigkeit.

3.4 Die elektrische Feldstärke

Die **elektrische Feldstärke** ist gegeben durch folgende Defintion:

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{\vec{F}\{\vec{r}\}}{Q\{\vec{r}\}} \tag{76}$$

Das Coulombsche Gesetz oben eingesetzt, besagt somit, dass eine Ladung Q', die sich am Ort $\vec{r}\,'$ befindet, an einem beliebigen Ort $\vec{r}$ die Feldstärke

$$\boxed{\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}} \tag{77}$$

erzeugt.

Bei mehr als 2 Ladungen verändert sich die Gleichung zu:

$$\boxed{\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{\vec{F}\{\vec{r}\}}{Q\{\vec{r}\}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0\, |\vec{r} - \vec{r}_i|^3}} \tag{78}$$

3.4.1 Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern

Bei zeitabhängigen Feldern verliert das Coulombsche Gesetz seine Gültigkeit.

3.5 Das Gaußsche Gesetz (3. Maxwell-Gleichung)

3.5.1 Das Gaußsche Gesetz in Integralform

$$\boxed{\oint\!\!\!\!\iint_{S_V} \vec{E}\{\vec{r}\} \circ d^2\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \varrho_V\{\vec{r}\,'\} d^3r' = \frac{Q_V}{\varepsilon_0}} \tag{79}$$

3.5.2 Das Gaußsche Gesetz in Differentialform

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes (Gleichung (72)) auf Gleichung (79), ergibt sich die Differentialform des **Gaußschen Gesetzes**:

$$\boxed{\varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E}\{\vec{r}\} = \varrho_V\{\vec{r}\}} \tag{80}$$

3.5.3 Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern

Bei zeitabhängigen Feldern behält das Gaußsche Gesetz, wie alle Maxwell-Gleichungen seine Gültigkeit.

3.6 Das Biot-Savart-Gesetz

Zur Aufstellung des Biot-Savart-Gesetz muss zunächst die **Stromdichte** $\vec{j}_V$ folgendermaßen definiert werden:

$$\vec{j}_V\{\vec{r}\} = \varrho_V\{\vec{r}\}\,\vec{v}\{\vec{r}\} \tag{81}$$

Der Strom selbst ist dann gegeben durch:

$$I = \oint\!\!\!\oint_S \vec{j}_V \circ d^2\vec{S} = \iiint_V \nabla \circ \vec{j}_V \, d^3r = \frac{Q_S}{t} \tag{82}$$

Das **Biot-Savart-Gesetz** schließlich ist gegeben durch folgenden Zusammenhang:

$$\boxed{\vec{B}\{\vec{r}\} = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_V\{\vec{r}\,'\} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3r' \qquad (83)}$$

3.6.1 Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern

Bei zeitabhängigen Feldern verliert das Biot-Savart-Gesetz seine Gültigkeit.

3.7 Das magnetische Vektorpotential (4. Maxwell-Gleichung)

Das Biot-Savart-Gesetz lässt sich mit einigen Umformungen auch wie folgt schreiben:

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \nabla \times \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_V\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' \tag{84}$$

Wir führen das **magnetische Vektorpotential** $\vec{A}\{\vec{r}\}$ folgendermaßen ein:

$$\boxed{\vec{A}\{\vec{r}\} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_V\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' \qquad (85)}$$

$\vec{A}$ ist dabei eine reine Hilfsgröße, ohne direkte physikalische Bedeutung.
Mit ihr vereinfacht sich jedoch das Biot-Savart-Gesetz zu:

$$\boxed{\vec{B}\{\vec{r}\} = \nabla \times \vec{A}\{\vec{r}\} \qquad (86)}$$

Laut den Gleichungen (14) und (86) gilt nun:

$$\boxed{\nabla \circ \vec{B}\{\vec{r}\} = \nabla \circ (\nabla \times \vec{A}\{\vec{r}\}) = 0 \qquad (87)}$$

Dies ist die **4. Maxwell-Gleichung**. Sie besagt, dass Magnetfelder grundsätzlich quellenfrei sind.

3.7.1 Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern

Auch die 4. Maxwell-Gleichung behält ihre Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern.

3.8 Das Ampèresche Gesetz (Durchflutungsgesetz)

3.8.1 Das Ampèresche Gesetz in Differentialform

$$\boxed{\nabla \times \vec{B}\{\vec{r}\} = \mu_0\, \vec{j}_V\{\vec{r}\}} \tag{88}$$

3.8.2 Das Ampèresche Gesetz in Integralform

Wendet man den Stokesschen Integralsatz (Gleichung (73)) auf Gleichung (88) an, so erhält man die integrale Form des **Ampèreschen Gesetz**:

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\{\vec{r}\} \circ d\vec{l} = \iint_{S_C} \left(\nabla \times \vec{B}\{\vec{r}\}\right) \circ d^2\vec{S} = \mu_0 \iint_{S_C} \vec{j}_V\{\vec{r}\} \circ d^2\vec{S} = \mu_0\, I_C} \tag{89}$$

Das Ampère-Gesetz besagt damit, dass das geschlossene Linienintegral der magnetischen Induktion bis auf den Faktor μ_0 gleich dem durch die umschlossene Fläche fließenden Strom ist.

3.8.3 Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern

Das Ampèresche Gesetz gilt nur im statischen Fall, also wenn gilt: $\frac{\partial \varrho_V}{\partial t} = 0$

Es kann jedoch für den zeitabhängigen Fall modifiziert werden:

3.9 Das modifizierte Ampèregesetz (1. Maxwell-Gleichung)

3.9.1 Das modifizierte Ampèregesetz in Differentialform

$$\boxed{\nabla \times \vec{B}\{\vec{r}\} = \mu_0 \left(\vec{j}_V\{\vec{r}\} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}\{\vec{r}\}}{\partial t}\right)} \tag{90}$$

mit der **Verschiebungsstromdichte** $\vec{j}_D$:

$$\vec{j}_D\{\vec{r}\} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}\{\vec{r}\}}{\partial t} \tag{91}$$

3.9.2 Das modifizierte Ampèregesetz in Integralform

Durch Anwendung des Stokesschen Integralsatzes erhält man das **modifizierte Ampèregesetz** in Integralform:

$$\boxed{\oint_C \vec{B}\{\vec{r}\} \circ d\vec{l} = \iint_{S_C} \left(\nabla \times \vec{B}\{\vec{r}\}\right) \circ d^2\vec{S} = \mu_0 \iint_{S_C} \left(\vec{j}_V\{\vec{r}\} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}\{\vec{r}\}}{\partial t}\right) \circ d^2\vec{S}} \tag{92}$$

3.10 Das Faradaysche Induktionsgesetz (2. Maxwell-Gleichung)

3.10.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz in Integralform

$$emf = \oint\limits_{C} \vec{E}\{\vec{r}\} \circ d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint\limits_{S_C} \vec{B}\{\vec{r}\} \circ d^2\vec{S} \tag{93}$$

3.10.2 Das Faradaysche Induktionsgesetz in Differentialform

Durch Anwendung des Stokesschen Integralsatzes erhält man das **Faraday-Gesetz** in Differentialform:

$$\nabla \times \vec{E}\{\vec{r}\} = -\frac{\partial \vec{B}\{\vec{r}\}}{\partial t} \tag{94}$$

3.11 Die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum

Nun wurden alle 4 **Maxwell-Gleichungen** für das Vakuum sowohl in integraler, als auch in differentieller Form hergeleitet.
Hier noch einmal eine Übersicht über die Gleichungen in der wichtigeren, differentiellen Schreibweise:

1. Maxwell-Gleichung	$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_V + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$	Ampère-Gesetz
2. Maxwell-Gleichung	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faraday-Gesetz
3. Maxwell-Gleichung	$\nabla \circ \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_V$	Gaußsches Gesetz
4. Maxwell-Gleichung	$\nabla \circ \vec{B} = 0$	-

Neben dem Coulombgesetz, dem Biot-Savart-Gesetz und den 4 Maxwell-Gleichungen hat sowohl die Kontinuitätsgleichung, als auch die Lorentzkraft eine große Bedeutung:

3.12 Die Kontinuitätsgleichung

Die **Kontinuitätsgleichung** ist die mathematische Formulierung des Prinzips der Erhaltung der elektrischen Ladung.

$$\frac{\partial \varrho_V\{\vec{r}, t\}}{\partial t} + \nabla \circ \vec{j}_V\{\vec{r}, t\} = 0 \tag{95}$$

3.12.1 Gültigkeit bei zeitabhängigen Feldern

Die Kontinuitätsgleichung ist allgemein gültig.

3.13 Die Lorentzkraft

Die **Lorentzkraft** liefert eine Verbindung der Größen $\vec{E}$, $\vec{B}$ und $\vec{F}$:

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{96}$$

4 Elektrostatik

4.1 Grundlegende Gesetze der Elektrostatik

Neben dem Coulombschen Gesetz für die Kraft und die Feldstärke gelten in der Elektrostatik folgende vereinfachende Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \tag{97}$$

$$\vec{j} = 0 \tag{98}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \tag{99}$$

$$\vec{B} = 0 \tag{100}$$

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = Q\vec{E} \tag{101}$$

Die **Maxwell-Gleichungen** vereinfachen sich zu:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{102}$$

$$\nabla \circ \vec{E} = \frac{\varrho_V}{\varepsilon_0} \tag{103}$$

4.2 Energie, Potential, Feldstärke und Spannung

4.2.1 Potentielle Energie im elektrischen Feld

Um eine Ladung Q von einem Anfangspunkt $\vec{r}_a$ zu einem Endpunkt $\vec{r}$ zu bringen, muss folgende Arbeit aufgewendet werden:

$$W_{\text{pot}} = -Q \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{E} \circ d\vec{l} \tag{104}$$

Da kein Perpetuum mobile exisitieren kann, gilt bei einer geschlossenen Kurve:

$$\oint_C \vec{E} \circ d\vec{l} = 0 \tag{105}$$

4.2.2 Potential und Spannung

Das **elektrische Potential** ist wie folgt definiert:

$$V_{\vec{r}_a,\vec{r}} = \frac{dW_{pot}}{dQ} = V(\vec{r}_a) - \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}} \vec{E} \circ d\vec{l} = -\int_{|\vec{r}_a|=\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \circ d\vec{l} \tag{106}$$

mit dem häufig gewählten Bezugspunkt: $V\left(|\vec{r}_a| = \infty\right) = 0$.

In differentieller Form geschrieben lautet das Gesetz:

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = -\nabla V\{\vec{r}\} \tag{107}$$

Die **Spannung** zwischen 2 Punkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ ergibt sich als Potentialdifferenz:

$$U_{21} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \circ d\vec{l} \tag{108}$$

4.2.3 Feldstärke und Potential kontinuierlicher Ladungsverteilungen

Für das **E-Feld** einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ϱ_V im Ort $\vec{r}\,'$ gilt:

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho_V\{\vec{r}\,'\}(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} d^3r' \tag{109}$$

Für das **Potential** einer kontinuierlichen Ladungsverteilung ϱ_V im Ort $\vec{r}\,'$ gilt:

$$V\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\varrho_V\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r' \tag{110}$$

4.2.4 Feldstärke und Potential spezieller Ladungsverteilungen

4.2.4.1 Feldstärke und Potential einer Punktladung im Ursprung

Für das **E-Feld** einer Punktladung im Ursprung ergibt sich in Kugelkoordinaten:

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \tag{111}$$

In kartesischen Koordinaten ergibt sich der weitaus kompliziertere Ausdruck:

$$\vec{E}\{x, y, z\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{112}$$

Für das **Potential** ergibt sich:

$$V\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \tag{113}$$

4.2.4.2 Feldstärke und Potential einer Punktladung an einem beliebigen Ort

Für das **E-Feld** einer Punktladung am Ort $\vec{r}'$ gilt:

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \tag{114}$$

Für das **Potential** einer Punktladung am Ort $\vec{r}'$ gilt:

$$V\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{115}$$

Bei mehreren Punktladungen, ergibt sich das **Potential** durch Superposition:

$$\boxed{V\{\vec{r}\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}} \tag{116}$$

4.2.4.3 Feldstärke und Potential einer Linienladung auf der z-Achse

Für eine Linienladungsdichte auf der z-Achse ist die Raumladungsdichte gegeben durch:

$$\varrho_V\{\vec{r}\} = \varrho_L\{z\}\,\delta(x)\,\delta(y) \tag{117}$$

Das **E-Feld** ergibt sich zu:

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{\varrho_L}{2\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\varrho_L}{2\pi\varepsilon_0\rho}\,\vec{e}_\rho \tag{118}$$

Für das **Potential** gilt:

$$V\{\vec{r}\} = V(\rho_0) + \frac{\varrho_L}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) \tag{119}$$

4.2.4.4 Feldstärke einer Flächenladung in der Ebene z=0

Für eine Flächenladung in der Ebene z=0 ist die Raumladungsdichte gegeben durch:

$$\varrho_V\{\vec{r}\} = \varrho_S\delta(z) \tag{120}$$

Das **E-Feld** ergibt sich zu:

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{z}{|z|} \end{pmatrix} = \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0} \cdot \vec{n} \tag{121}$$

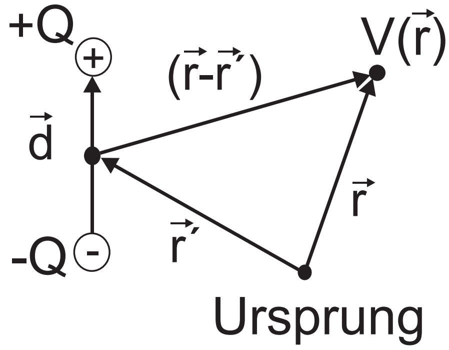
4.3 Elektrische Leiter und Dielektrika

4.3.1 Das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j}_{\mathrm{Ohm}} = \sigma \vec{E} \tag{122}$$

4.3.2 Dipole in Dielektrika

Dielektrika besitzen keine beweglichen Ladungsträger, allerdings verschiebt sich im äußeren elektrischen Feld die negativ geladene Elektronenhülle leicht gegenüber den positiv geladenen Atomrümpfen. Es bilden sich Dipole aus.



Nach der obigen Abbildung definiert man das sogenannte **Dipolmoment**:

$$\vec{p} = Q\vec{d} \tag{123}$$

wobei der Vektor $\vec{d}$ immer von der negativen zur positiven Ladung zeigt.

Bei n Dipolen in einem Volumen ΔV gilt für das Gesamtdipolmoment:

$$\vec{p}_{\mathrm{ges}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \tag{124}$$

4.3.3 Die elektrische Polarisation

Die **elektrische Polarisation** wird als Dipolmoment pro Volumen definiert:

$$\vec{P}\{\vec{r}\} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \frac{d\vec{p}_{\mathrm{ges}}}{dV} \tag{125}$$

Für n gleiche elementare Dipole $\vec{p} = \vec{p}_i = Q\vec{d}$ gilt:

$$\vec{P} = nQ\vec{d} \tag{126}$$

Das Potential einer Dipolverteilung ist gegeben durch:

$$V\{\vec{r}\} = \iiint\limits_V \frac{\vec{P}\{\vec{r}\,'\} \circ (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \, |\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3r' \tag{127}$$

4.3.4 Die Polarisationsraumladungsdichte

Wir betrachten nun einen Körper in dem frei bewegliche Ladungen der Ladungsdichte ϱ_{frei} und ortsfeste Dipole der Polarisation $\vec{P}$ vorhanden sind.

Das Potential dieses Modells lautet:

$$V\{\vec{r}\} = V_0 + \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}\,'\} - \nabla' \circ \vec{P}\{\vec{r}\,'\}}{4\pi\varepsilon_0 \, |\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' \tag{128}$$

mit der **Polarisationsraumladungsdichte**:

$$\boxed{\varrho_P = -\nabla \circ \vec{P}} \tag{129}$$

Es gilt:

$$\boxed{\varrho_V = \varrho_{\text{frei}} + \varrho_P = \varrho_{\text{frei}} - \nabla \circ \vec{P}} \tag{130}$$

4.4 Die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$

Man führt nun die **dielektrische Verschiebung** wie folgt ein:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \tag{131}$$

Somit ergibt sich das **Gaußsche Gesetz** für die dielektrische Verschiebung:

$$\boxed{\nabla \circ \vec{D} = \varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E} + \nabla \circ \vec{P} = \varrho_V - \varrho_P = \varrho_{\text{frei}}} \tag{132}$$

Das Oberflächenintegral über $\vec{D}$ ist gleich der gesamten freien Ladung im Volumen:

$$\iint\limits_S \vec{D} \circ d^2\vec{S} = \iiint\limits_V \varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}\} d^3r = Q_{\text{frei}} \tag{133}$$

4.4.1 Die elektrische Suszeptibilität und die relative Dielektrizitätskonstante

Die Ausbildung elementarer Dipole in Dielektrika ist in vielen Fällen eine Reaktion auf ein äußeres Feld.
Deshalb gilt in isotropen Materialien:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \tag{134}$$

Für die dielektrische Verschiebung folgt:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = (1 + \chi_e)\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}} \tag{135}$$

mit der **relativen Dielektrizitätskonstante**:

$$\varepsilon = \varepsilon\{\vec{r}\} = 1 + \chi_e \tag{136}$$

4.5 Potenzial-, Poisson- und Laplace-Gleichung

4.5.1 Die Potenzialgleichung

In linearen, isotropen Medien gilt die **Potenzialgleichung**:

$$\boxed{\varepsilon\{\vec{r}\}\varepsilon_0\Delta V\{\vec{r}\} + \varepsilon_0\nabla\varepsilon\{\vec{r}\}\circ\nabla V\{\vec{r}\} = -\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}\}} \quad (137)$$

4.5.2 Die Poissongleichung

In homogenen Medien ist $\varepsilon\{\vec{r}\}$ konstant und es gilt die **Poissongleichung**:

$$\boxed{\Delta V\{\vec{r}\} = -\frac{\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}\}}{\varepsilon\varepsilon_0}} \quad (138)$$

4.5.3 Die Laplacegleichung

In raumladungsfreien Gebieten ist $\varrho_{\text{frei}} = 0$ und es gilt die **Laplacegleichung**:

$$\boxed{\Delta V\{\vec{r}\} = 0} \quad (139)$$

4.6 Kapazität und Widerstand

4.6.1 Kapazität eines Parallelplattenkondensators

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \quad (140)$$

4.6.2 Kapazität eines Kugelkondensators

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (141)$$

wobei r_1 der Radius der inneren und r_2 der Radius der äußeren Kugel ist.

4.6.3 Widerstand eines quaderförmigen Leiters

Der Widerstand eines quaderförmigen Leiters der Länge l mit Querschnittsfläche S und konstantem E-Feld ist:

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (142)$$

4.7 Energiedichte im elektrostatischen Feld

$$\boxed{w_{\text{el}} = \frac{|\vec{D}|^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0\,|\vec{E}|^2 = \frac{1}{2}\vec{E}\circ\vec{D}} \quad (143)$$

5 Magnetostatik

5.1 Grundlegende Gesetze der Magnetostatik

Neben dem Biot-Savart-Gesetz für das B-Feld gelten in der Magnetostatik folgende vereinfachende Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \tag{144}$$

$$\nabla \circ \vec{j}_V = 0 \tag{145}$$

$$\frac{\partial \varrho_V}{\partial t} = 0 \tag{146}$$

Die **Maxwell-Gleichungen** vereinfachen sich zu:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_V \tag{147}$$

$$\nabla \circ \vec{B} = 0 \tag{148}$$

5.2 Magnetfelder spezieller Anordnungen

5.2.1 Magnetfeld eines geraden Stromfadens

Für die Stromdichte eines Stromfadens entlang der z-Achse gilt:

$$\vec{j}_V\{\vec{r}\} = I\,\delta(x)\,\delta(y)\,\vec{e}_z \tag{149}$$

Für das Magnetfeld in Zylinderkoordinaten gilt dann:

$$\vec{B}\{x, y, 0\} = \frac{I\mu_0}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \tag{150}$$

Da das B-Feld zylindersymmetrisch ist, spielt die z-Koordinate keine Rolle.

5.2.2 Magnetfeld bei zylindersymmetrischer Stromverteilung

Bei zylindersymmetrischer Stromverteilung gilt:

$$\vec{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \tag{151}$$

Das Ergebnis des geraden Stromfadens gilt also auch allgemein bei zylindersymmetrischer Stromverteilung.

5.2.3 Magnetfeld einer kreisförmigen Stromschleife

Für die Stromdichte einer Stromschleife in der x-y-Ebene und mit dem Urpsrung als Mittelpunkt gilt:

$$\vec{j}_V\{\vec{r}\} = I\,\delta(z)\,\delta(\rho - \rho_0)\,\vec{e}_\phi \tag{152}$$

Für Aufpunkte auf der z-Achse ($\vec{r} = (0, 0, z)^T$) gilt:

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{I\mu_0}{2}\,\frac{\rho_0^2}{(z^2 + \rho_0^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z \tag{153}$$

5.3 Das magnetische Dipolmoment

Das **magnetische Dipolmoment** einer räumlich begrenzten Stromverteilung wird folgendermaßen definiert:

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{r}\,' \times \vec{j}_V\{\vec{r}\,'\} d^3r' \qquad (154)}$$

Außerhalb der Stromverteilung ergibt sich für das magnetische Vektorpotential in erster Näherung:

$$\boxed{\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \qquad (155)}$$

Wenn die magnetische Induktion hinreichend weit weg von der Stromdichteverteilung $\vec{j}$ bestimmt wird, gilt:

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \circ \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \qquad (156)$$

5.3.1 Magnetisches Dipolmoment eines geschlossenen Stromfadens

Für einen geschlossenen Stromfaden gilt:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint\limits_C \vec{r} \times d\vec{l}\{\vec{r}\} \qquad (157)$$

Durchläuft $\vec{l}\{\vec{r}\}$ die ganze Kurve C, so erhält man:

$$|\vec{m}| = |I|\ S_C \qquad (158)$$

5.3.2 Magnetisches Dipolmoment bewegter Punktladungen

Wenn alle N Teilchen dieselbe Masse $\overline{m}$ und Ladung q haben, gilt:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \frac{q}{\overline{m}} \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \frac{1}{2} \frac{q}{\overline{m}} \vec{L} \qquad (159)$$

mit dem Drehimpuls

$$\vec{L}_i = \overline{m_i}\, \vec{r}_i \times \vec{v}_i \qquad (160)$$

5.4 Magnetisierbare Materie

Die magnetische Induktion entsteht aus:

1. dem Beitrag der Bewegung elektrischer Dipole.
2. dem Beitrag der ortsfesten magnetischen Dipole.
3. dem Beitrag der freien Ladungsträger.

5.4.1 Beitrag elektrischer Dipole zum Magnetfeld

$$\boxed{\vec{j}_{Pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}} \tag{161}$$

In der Magnetostatik gilt:

$$\vec{j}_{Pol} = 0 \tag{162}$$

5.4.2 Beitrag magnetischer Dipole zum Magnetfeld

Durch die Elektronenbewegung in der Materie können mikroskopische Kreisströme entstehen, die ein infinitesimales magnetisches Dipolmoment $d^3\vec{m}$ besitzen und somit das Magnetfeld beeinflussen.

Wir definieren die **Magnetisierung** als magnetische Dipolmomentdichte (magnetisches Dipolmoment pro Volumen):

$$\vec{M}\{\vec{r}\} = \frac{d^3\vec{m}\{\vec{r}\}}{d^3r} \tag{163}$$

$$\boxed{\vec{A}_{\text{magn}}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{M}\{\vec{r}\,'\} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} d^3r'} \tag{164}$$

Man kann auch schreiben:

$$\vec{A}_{\text{magn}}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{j}_{\text{magn}}\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' \tag{165}$$

mit der **Magnetisierungsstromdichte**

$$\boxed{\vec{j}_{\text{magn}}\{\vec{r}\} = \nabla \times \vec{M}\{\vec{r}\}} \tag{166}$$

5.4.3 Beitrag freier Ladungsträger zum Magnetfeld

$$\vec{A}_{\text{frei}}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{j}_{\text{frei}}\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r' \tag{167}$$

5.4.4 Gesamtmagnetfeld

Insgesamt gilt in der Magnetostatik:

$$\vec{j}_V = \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{magn}} \tag{168}$$

5.5 Das Magnetfeld $\vec{H}$

Man führt nun das **Magnetfeld** wie folgt ein:

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}} \tag{169}$$

Somit ergibt sich das **modifizierte Ampèregesetz** für das Magnetfeld:

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \vec{B} - \nabla \times \vec{M} = \vec{j}_V - \vec{j}_{\mathrm{magn}} = \vec{j}_{\mathrm{frei}}} \tag{170}$$

5.5.1 Die magnetische Suszeptibilität und die relative Permeabilität

Für isotrope Stoffe gilt:

$$\vec{M} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B} \tag{171}$$

Für das Magnetfeld folgt:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B} = \left(1 - \frac{\chi_m}{1+\chi_m}\right)\frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \left(\frac{1}{1+\chi_m}\right)\frac{1}{\mu_0}\vec{B} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B} \tag{172}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}} \tag{173}$$

mit der **relativen Permeabilität**:

$$\mu = \mu\{\vec{r}\} = 1 + \chi_m \tag{174}$$

5.6 Das skalare magnetische Potential

Unter der Randbedingung $\vec{j}_{\mathrm{frei}} = 0$ gilt:

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \tag{175}$$

Deswegen gibt es ein **skalares magnetisches Potential** Φ_M, so dass gilt:

$$\boxed{\vec{H} = -\nabla\Phi_M} \tag{176}$$

Für lineare Medien gilt nun die **Laplace-Gleichung**:

$$-\mu\mu_0\Delta\Phi_M = 0 \tag{177}$$

Für nichtlineare Medien mit Magnetisierung gilt die **Coulombgleichung**:

$$\Delta\Phi_M = \nabla \circ \vec{M} \tag{178}$$

5.7 Energiedichte im magnetostatischen Feld

$$\boxed{w_{\mathrm{magn}}\{\vec{r}\} = \frac{1}{2}\vec{H}\{\vec{r}\} \circ \vec{B}\{\vec{r}\}} \tag{179}$$

6 Maxwell-Gleichungen und Wellengleichung

6.1 Die Maxwell-Gleichungen in polarisierbarer Materie

Berücksichtigt man alle Ströme und Ladungen (also auch Dipolladungen, etc.) lässt sich keine der Vereinfachungen der Elektrostatik oder Magnetostatik mehr vornehmen.
Man muss das vollständige System der Maxwellgleichungen, wie sie in § 3.11 zusammengefasst wurden, berücksichtigen.

Wir wollen nun die Maxwellgleichungen für das Vakuum aus § 3.11 für Materie verallgemeinern.
Dazu fassen wir noch einmal unsere Erkenntnisse der letzten Kapitel zu den verschiedenen Raumladungsdichten und Stromdichten zusammen:

$$\boxed{\begin{aligned}
\varrho_P &= -\nabla \circ \vec{P} &&\text{und}&& \vec{j}_{\mathrm{Pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} && (180)\\
\varrho_{\mathrm{magn}} &= 0 &&\text{und}&& \vec{j}_{\mathrm{magn}} = \nabla \times \vec{M} && (181)\\
\varrho_V &= \varrho_{\mathrm{frei}} + \varrho_P + \varrho_{\mathrm{magn}} &&\text{und}&& \vec{j}_V = \vec{j}_{\mathrm{frei}} + \vec{j}_{Pol} + \vec{j}_{\mathrm{magn}} && (182)
\end{aligned}}$$

Die Größe ϱ_{magn} wird dabei nur eingeführt, um die Analogie zwischen Ladungsdichte und Stromdichte zu verdeutlichen. Da es nach unserem heutigen Wissensstand keine magnetischen Ladungen gibt, ist ϱ_{magn} immer 0.

Berücksichtigt man nun noch die Gleichungen (131) und (169) ergeben sich die **Maxwell-Gleichungen für polarisierbare und magnetisierbare Materie**:

$$\boxed{\begin{aligned}
\nabla \times \vec{H} &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j}_{\mathrm{frei}} && (183)\\
\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} && (184)\\
\nabla \circ \vec{D} &= \varrho_{\mathrm{frei}} && (185)\\
\nabla \circ \vec{B} &= 0 && (186)
\end{aligned}}$$

6.2 Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Es gelten die Materialgleichungen:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{187}$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \tag{188}$$

6.2.1 Allgemeine Stetigkeitsbedingungen

1. E-Feld:

$$\left[\vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)\right] \times \vec{n} = 0 \quad \text{bzw.} \quad E_{\text{tan}1} = E_{\text{tan}2} \tag{189}$$

2. B-Feld:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad B_{\text{norm}1} = B_{\text{norm}2} \tag{190}$$

3. D-Feld:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \varrho_S \tag{191}$$

4. H-Feld:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{j}_S \tag{192}$$

5. Stromdichte:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{j}_2 - \vec{j}_1\right) = \frac{\partial}{\partial t}\varrho_S \tag{193}$$

6.2.2 Stetigkeitsbedingungen zwischen 2 Dielektrika

Ideale Dielektrika sind nicht leitend und tragen keinerlei Ladungen:

$$\varrho_S = \vec{j}_S = 0 \tag{194}$$

Somit lauten die Stetigkeitsbedingungen für diesen Fall:

1. E-Feld:

$$\left[\vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)\right] \times \vec{n} = 0 \tag{195}$$

$$E_{\text{tan}1} = E_{\text{tan}2} \tag{196}$$

2. B-Feld:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0 \tag{197}$$

$$B_{\text{norm}1} = B_{\text{norm}2} \tag{198}$$

3. D-Feld:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = 0 \tag{199}$$

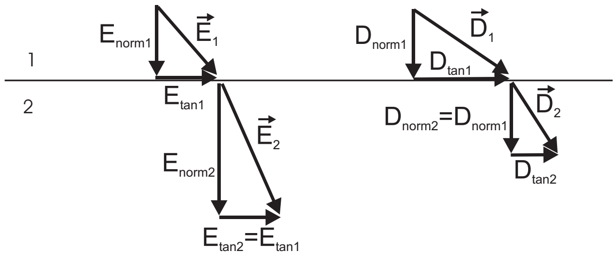
$$D_{\text{norm}1} = D_{\text{norm}2} \tag{200}$$

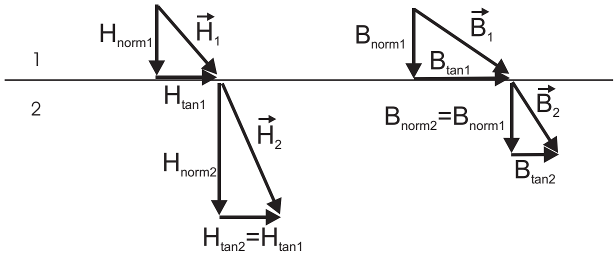
4. H-Feld:

$$\left[\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\right] \times \vec{n} = 0 \tag{201}$$

$$H_{\text{tan}1} = H_{\text{tan}2} \tag{202}$$

An einer Oberflächenladungs- und Oberflächenstromfreien Grenzfläche ergeben sich also folgende Verläufe für die Vektoren der $\vec{E}$-, $\vec{D}$-, $\vec{B}$-, bzw. $\vec{H}$-Felder:





6.3 Das skalare elektrische Potential

Mit Gleichung (86) und dem Faraday-Gesetz folgt:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \tag{203}$$

Hieraus folgt, dass ein **skalares elektrisches Potential** Φ_{el} existiert, so dass:

$$\boxed{\nabla \Phi_{\text{el}} = -\left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right)} \tag{204}$$

Für das E-Feld folgt nun:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi_{\text{el}} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \tag{205}$$

Φ_{el} geht im statischen Fall ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) in das elektrische Potential V über.

6.4 Eichtransformation

Mit der Einführung des skalaren elektrischen Potentials gilt:

$$\Delta \vec{A} - \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \nabla \left(\nabla \circ \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{el}} \right) = -\mu \mu_0 \vec{j}_{\text{frei}} \tag{206}$$

$$\Delta \Phi_{\text{el}} + \nabla \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\frac{\varrho_{\text{frei}}}{\varepsilon \varepsilon_0} \tag{207}$$

6.4.1 Ziel einer Eichtransformation

Die beiden Gleichungen (206) und (207) sind eichinvariant, das heißt die Form der Gleichungen bleibt bei einer Eichtransformation erhalten. Allerdings können die beiden Gleichungen mit einer Eichtransformation deutlich vereinfacht werden. Die wichtigsten Eichtransformationen sind die Coulomb- und die Lorentzeichung.

6.4.2 Transformationsgleichungen

Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ ist über die Bedingung

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \tag{208}$$

nicht eindeutig bestimmt, denn außer $\vec{A}$ erfüllt auch $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$ diese Gleichung. Je nach Wahl der beliebigen skalaren Funktion Λ können sich für $\vec{A}'$ unendlich viele Lösungen ergeben.

Λ heißt **Eichfunktion**. Mit ihr lassen sich sogenannte **Eichtransformationen** nach folgenden Gleichungen durchführen:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda \tag{209}$$

$$\Phi_{\mathrm{el}}' = \Phi_{\mathrm{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \tag{210}$$

Die zweite Transformationsgleichung ist notwendig, damit die Feldstärke $\vec{E}$ bei einer Transformation von $\vec{A}$ unverändert bleibt.
Eine solche Transformation ist natürlich nur deswegen erlaubt, da sowohl $\vec{A}$, als auch Φ_{el} reine Hilfsgrößen ohne physikalische Bedeutung sind.

6.4.3 Die Coulomb-Eichung

Die **Coulomb-Eichung** ist gegeben durch:

$$\nabla \circ \vec{A} = 0 \tag{211}$$

Falls $\nabla \circ \vec{A} \neq 0$ wählt man die Eichfunktion Λ als Lösung der Gleichung:

$$\Delta\Lambda = -\nabla \circ \vec{A} \tag{212}$$

Mit dem resultierenden $\vec{A}'$ ergibt sich automatisch $\nabla \circ \vec{A}' = 0$.

Mit der Coulombeichung vereinfachen sich die Gleichungen (206) und (207) zu:

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\nabla\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} - \mu\mu_0\vec{j}_{\mathrm{frei}} \tag{213}$$

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}} = -\frac{\varrho_{\mathrm{frei}}}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{214}$$

mit dem sogenannten Coulomb-Integral als Lösung:

$$\Phi_{\mathrm{el}}\{\vec{r}, t\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varrho_{\mathrm{frei}}\{\vec{r}\,', t\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}d^3r' \tag{215}$$

6.4.4 Die Lorentzeichung

Die **Lorentz-Eichung** ist gegeben durch:

$$\nabla \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = 0 \tag{216}$$

Falls diese Gleichung nicht erfüllt ist, wählt man die Eichfunktion Λ als Lösung der Gleichung:

$$\nabla \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = -\Delta\Lambda + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda \tag{217}$$

Mit der resultierenden Eichfunktion wird die obige Bedingung automatisch erfüllt.

Mit Hilfe der Lorentzeichung vereinfachen sich die Gleichungen (206) und (207) zu 2 **ungedämpften inhomogenen Wellengleichungen**:

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j}_{\mathrm{frei}} \tag{218}$$

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_{\mathrm{el}} = -\frac{\varrho_{\mathrm{frei}}}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{219}$$

6.5 Die Wellengleichungen

Für die Lichtgeschwindigkeit c gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \tag{220}$$

Außerdem gilt im Folgenden:

$$\Psi \in \{\Phi_{\mathrm{el}}, A_x, A_y, A_z\} \tag{221}$$

$$g\{\vec{r},t\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\varrho_{\mathrm{frei}} \qquad \text{oder} \qquad g\{\vec{r},t\} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\vec{j}_{\mathrm{frei}} \tag{222}$$

6.5.1 Die ungedämpfte homogene Wellengleichung

$$\Delta\Psi\{\vec{r},t\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\{\vec{r},t\} = 0 \tag{223}$$

6.5.2 Die ungedämpfte inhomogene Wellengleichung

$$\Delta\Psi\{\vec{r},t\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\{\vec{r},t\} = -4\pi g\{\vec{r},t\} \tag{224}$$

6.5.3 Die gedämpfte homogene Wellengleichung

$$\Delta\Psi\{\vec{r},t\} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\Psi\{\vec{r},t\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\{\vec{r},t\} = 0 \tag{225}$$

6.6 Wellengleichung für das elektrische Feld und die magnetische Induktion

In ungeladenen Dielektrika gelten die Maxwellgleichungen, wie in § 6.1 beschrieben (allerdings mit den Vereinfachungen $\varrho_{\text{frei}} = 0$ und $\vec{j}_{\text{frei}} = 0$).

Bildet man die Rotation der Maxwellgleichungen ergeben sich folgende **Wellengleichungen**:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \tag{226}$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \tag{227}$$

6.7 Brechzahl, Lichtgeschwindigkeit und Wellenvektor

6.7.1 Brechzahl

Für die **Brechzahl** eines Mediums gilt:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{228}$$

6.7.2 Lichtgeschwindigkeit

Für die **Vakuumlichtgeschwindigkeit** gilt:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \tag{229}$$

Für die **Lichtgeschwindigkeit** in einem beliebigen Medium folgt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c_0}{n} \tag{230}$$

6.7.3 Wellenvektor und Wellenzahl

Für die **Vakuumwellenzahl** gilt:

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \tag{231}$$

Für die **Wellenzahl** gilt:

$$k = \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c} = n\frac{\omega}{c_0} = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} = nk_0 \tag{232}$$

Für den **Wellenvektor** gilt schließlich:

$$\vec{k} = k \cdot \vec{e}_k \tag{233}$$

6.7.4 Die Dispersionsrelation

$$\|\vec{k}\|^2 = \vec{k} \circ \vec{k} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{234}$$

Die Dispersionsrelation muss erfüllt sein, damit ein Feld Lösung der Wellengleichung ist!

7 Wellenausbreitung in Dielektrika

Folgende Betrachtungen gelten unter den Vorraussetzungen $\vec{j}_{\text{frei}} = \varrho_{\text{frei}} = \sigma = 0$ und $\varepsilon = \text{const.}$ bzw. $\mu = \text{const.}$.

7.1 Ebene elektromagnetische Wellen

Da $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die homogenen Wellengleichungen erfüllen sind ebene Wellen eine mögliche Ausbreitungsform.

Ebene elektromagnetische Wellen sind transversal, d.h., es gilt:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B} \tag{235}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{e}_k \times \vec{E}}{\mu\mu_0 c} = \frac{\vec{e}_k \times \vec{E}}{\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}} = \frac{\vec{e}_k \times \vec{E}}{Z} \tag{236}$$

mit dem **Wellenwiderstand**:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \tag{237}$$

7.1.1 Monochromatische ebene Wellen

Das elektrische bzw. das magnetische Feld hat die Form:

$$\vec{E}_R\{\vec{r}, t\} = \vec{E}_{R0} \cos\left\{\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t + \varphi\right\} = \text{Re}\left\{\vec{E}_0 \exp\left\{i\vec{k} \circ \vec{r} - i\,\omega t\right\}\right\} \tag{238}$$

wobei meistens abkürzend geschrieben wird:

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = \vec{E}_0 \exp\left\{i\left(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t\right)\right\} \tag{239}$$

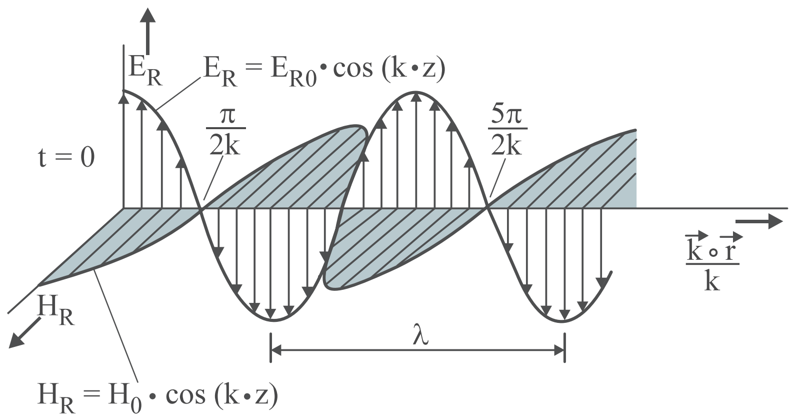
bzw.

$$\vec{H}\{\vec{r}, t\} = \vec{H}_0 \exp\left\{i\left(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t\right)\right\} \tag{240}$$

mit

$$\vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{0\text{x}} \exp\{i\varphi_x\} \\ E_{0\text{y}} \exp\{i\varphi_y\} \\ E_{0\text{z}} \exp\{i\varphi_z\} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{H}_0 = \begin{pmatrix} H_{0\text{x}} \exp\{i\varphi_x\} \\ H_{0\text{y}} \exp\{i\varphi_y\} \\ H_{0\text{z}} \exp\{i\varphi_z\} \end{pmatrix} \tag{241}$$

Eine monochromatische Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ und für $\varphi = 0$ sieht folgendermaßen aus:



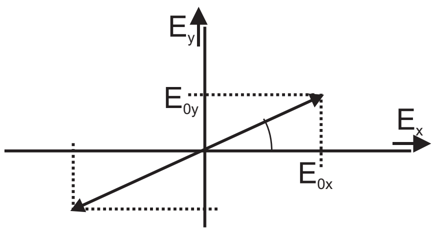
7.1.2 Polarisation

Betrachtet man eine ebene Welle mit Ausbreitungsrichtung z, hat $\vec{E}$ im Allgemeinen eine x- und eine y-Komponente. Die Amplituden lauten dann:

$$E_x = E_{0\mathrm{x}} \cos\{kz - \omega t + \varphi\} \tag{242}$$
$$E_y = E_{0\mathrm{y}} \cos\{kz - \omega t + \varphi + \delta\} \tag{243}$$

Nun lassen sich mehrere Fälle unterscheiden:

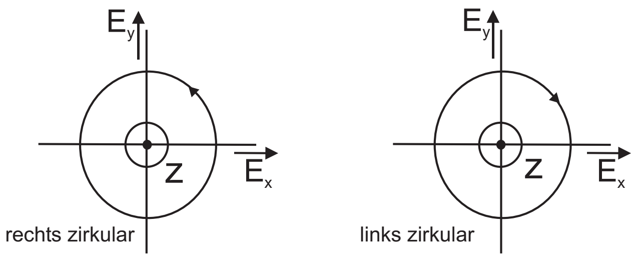
7.1.2.1 Linear polarisierte Welle $(\delta = \pm m\pi, m \in \mathbb{N}_0)$



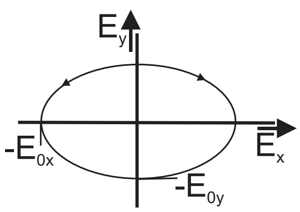
$$\tan\alpha = \pm\frac{E_{0\mathrm{y}}}{E_{0\mathrm{x}}} \tag{244}$$

7.1.2.2 Zirkular polarisierte Welle $(\delta = \pm\frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{N}_0, E_{0\mathrm{x}} = E_{0\mathrm{y}} = E_0)$

$$\vec{E}_R = E_0(\vec{e}_x \cos\{kz - \omega t + \varphi\} \mp \vec{e}_y \sin\{kz - \omega t + \varphi\}) \tag{245}$$

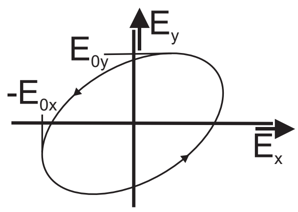


7.1.2.3 Elliptisch polarisierte Welle $(\delta = \pm\frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{N}_0, E_{0\mathrm{x}} \neq E_{0\mathrm{y}})$



$$\frac{E_{\mathrm{Rx}}^2}{E_{0\mathrm{x}}^2} + \frac{E_{\mathrm{Ry}}^2}{E_{0\mathrm{y}}^2} = 1 \tag{246}$$

7.1.2.4 Elliptisch polarisierte Welle $(\delta = \text{beliebig}, E_{0\mathrm{x}}, E_{0\mathrm{y}}\ \text{beliebig})$



7.2 Energiedichte, Leistungsdichte und Poynting-Vektor

7.2.1 Elektromagnetische Energiedichte

$$\boxed{w\{\vec{r},t\} = w_{\mathrm{el}} + w_{\mathrm{magn}} = \frac{1}{2}\vec{E} \circ \vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H} \circ \vec{B}} \tag{247}$$

7.2.2 Die mechanische Leistungsdichte

$$w_{\mathrm{mech}} = \vec{j}_{\mathrm{frei}} \circ \vec{E} \tag{248}$$

7.2.3 Der Poynting-Vektor

$$\boxed{\vec{S} = \vec{E}_R \times \vec{H}_R = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}\right\} \times \mathrm{Re}\left\{\vec{H}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z}\,\frac{\|\vec{E} \circ \vec{E}\| + |\vec{E}|^2}{2}\,\frac{\vec{k}}{k}\right\}} \tag{249}$$

Außerdem gilt:

$$S = w \cdot c \tag{250}$$

Der zeitgemittelte Poynting-Vektor ergibt sich durch:

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{S}_0\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\} \tag{251}$$

7.2.4 Leistung

Die Leistung berechnet sich aus:

$$P = \oiint_{S_V} \vec{S} \circ d^2\vec{S} \tag{252}$$

7.2.5 Die Kontinuitätsgleichung der Energie

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \circ \vec{S} = -\vec{j}_{\mathrm{frei}} \circ \vec{E}} \tag{253}$$

7.3 Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

Es gilt:

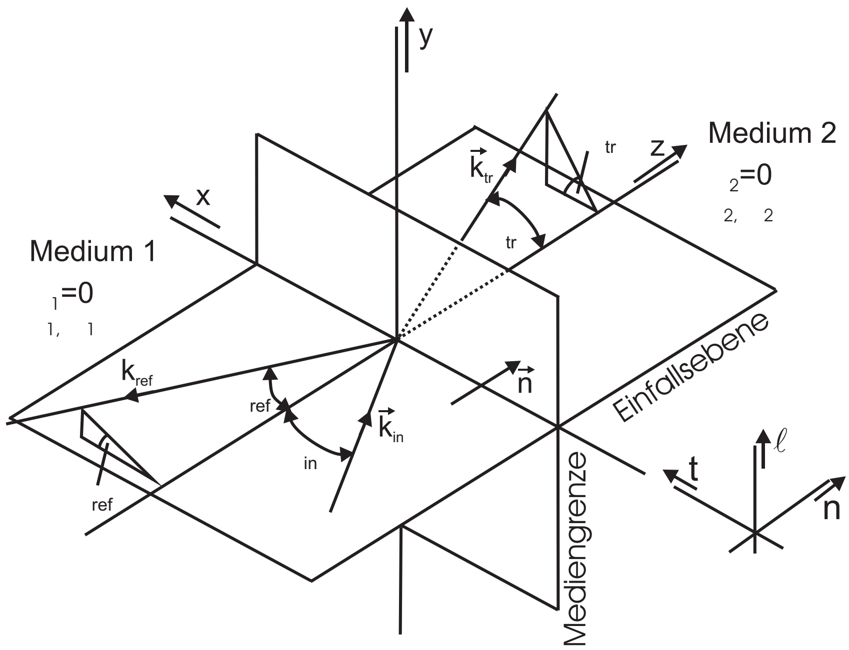
$$\boxed{c_{\mathrm{gr}} \cdot c_{\mathrm{ph}} = c^2} \tag{254}$$

Mit dem Ausbreitungskoeffizienten β, der im allgemeinen die Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung der Welle darstellt (also zum Beispiel $\beta = k_z$), ergibt sich:

$$c_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{\beta} \qquad \text{bzw.} \qquad c_{\mathrm{gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \tag{255}$$

7.4 Reflexion und Brechung

7.4.1 Brechungs- und Reflexionsgesetz



Fällt eine ebene Welle auf eine Grenzfläche, so wird sie dort teilweise reflektiert und teilweise gebrochen.
Es gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

1. Bei der Reflexion und bei der Brechung tritt keine Frequenzänderung auf.

2. Einfallende, reflektierte und transmittierte Welle liegen in einer Ebene:

$$\varphi_{\text{ref}} = \varphi_{\text{tr}} = 0 \tag{256}$$

3. Es gilt das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin\theta_{\text{in}}}{\sin\theta_{\text{tr}}} = \frac{n_{\text{tr}}}{n_{\text{in}}} \tag{257}$$

4. Es gilt das Reflexionsgesetz:

$$\vec{n} \times \left(\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}}\right) \times \vec{n} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \theta_{\text{in}} = \theta_{\text{ref}} \tag{258}$$

5. Die Tangentialkomponente der Welle bleibt bei der Brechung stetig:

$$\left(\vec{n} \times \vec{k}_{\text{tr}}\right) \times \vec{n} = \left(\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\right) \times \vec{n} \tag{259}$$

6. Die Normalenkomponenten der einfallenden und der transmittierten Welle sind über folgende Relation miteinander verbunden:

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{\|\vec{k}_{\text{tr}}\|^2 - \|\vec{k}_{\text{in}}\|^2 + \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}\right)^2} \tag{260}$$

7.5 TE- und TM-Wellen

Wir wollen nun den Spezialfall von TE- bzw. TM-Wellen besprechen:

7.5.1 TE-Wellen

Eine TE-Welle liegt vor, wenn $\vec{E}_{\text{in}}$ parallel zur Einfallsebene linear polarisiert ist und $\vec{H}_{\text{in}}$ in der Einfallsebene schwingt.

Mit dem Koordinatensystem n, $\vec{e}_t$, $\vec{e}_l$, wie es in § 7.4.1 in der Abbildung definiert wurde, gilt also:

$$\vec{n} \circ \vec{E}_{\text{TE}} = 0 \tag{261}$$

bzw.

$$\vec{E}_{\text{TE}} = (\vec{e}_l \circ \vec{E})\vec{e}_l = E_{\text{TE}}\vec{e}_l \tag{262}$$

mit

$$\vec{e}_l = \frac{\vec{n} \times \vec{k}}{\|\vec{n} \times \vec{k}\|} \tag{263}$$

$\vec{e}_l$ kann bei einfacheren geometrischen Anordnungen oft schon durch Überlegung bestimmt werden.

Außerdem gilt:

$$E_{\text{tr}} = E_{\text{in}} + E_{\text{ref}} \tag{264}$$

7.5.2 TM-Wellen

Eine TM-Welle liegt vor, wenn $\vec{H}_{\text{in}}$ parallel zur Einfallsebene linear polarisiert ist und $\vec{E}_{\text{in}}$ in der Einfallsebene schwingt.

Mit dem Koordinatensystem n, $\vec{e}_t$, $\vec{e}_l$, wie es in § 7.4.1 in der Abbildung definiert wurde, gilt also:

$$\vec{n} \circ \vec{H}_{\text{TM}} = 0 \tag{265}$$

bzw.

$$\vec{H}_{\text{TM}} = (\vec{e}_l \circ \vec{H})\vec{e}_l = H_{\text{TM}}\vec{e}_l \tag{266}$$

mit

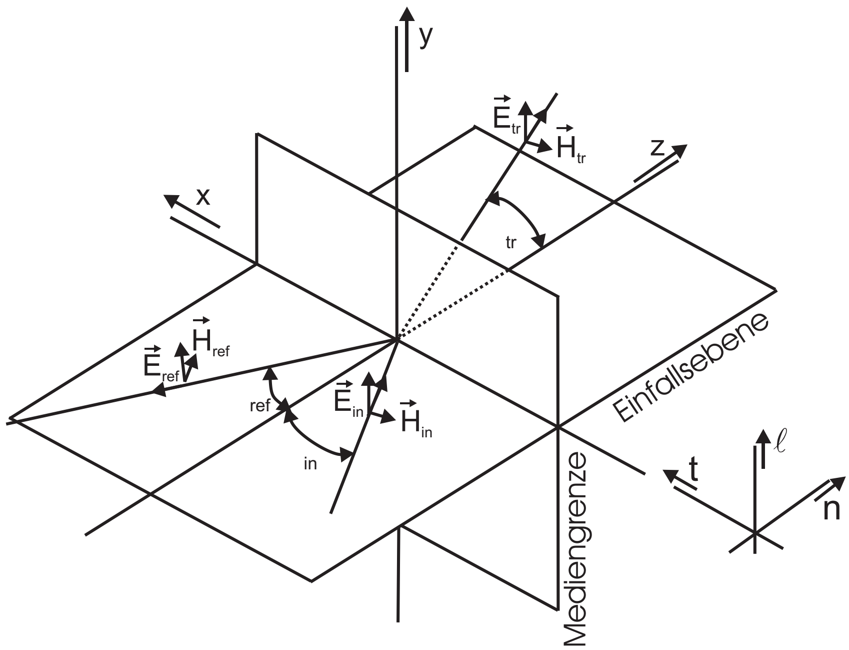
$$\vec{e}_l = \frac{\vec{n} \times \vec{k}}{\|\vec{n} \times \vec{k}\|} \tag{267}$$

$\vec{e}_l$ kann bei einfacheren geometrischen Anordnungen oft schon durch Überlegung bestimmt werden.

Außerdem gilt:

$$H_{\text{tr}} = H_{\text{in}} + H_{\text{ref}} \tag{268}$$

7.5.3 Amplituden bei Reflexion und Brechung für TE-Wellen



Für TE-Wellen gilt:

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{E_{\mathrm{ref}}}{E_{\mathrm{in}}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}} - \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}} + \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\right)} = \frac{\frac{1}{\mu_{\mathrm{in}}} n_{\mathrm{in}} \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} - \frac{1}{\mu_{\mathrm{tr}}}\sqrt{n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}}{\frac{1}{\mu_{\mathrm{in}}} n_{\mathrm{in}} \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + \frac{1}{\mu_{\mathrm{tr}}}\sqrt{n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}} \tag{269}$$

$$t_{\mathrm{TE}} = \frac{E_{\mathrm{tr}}}{E_{\mathrm{in}}} = 1 + r_{\mathrm{TE}} = \frac{\frac{2}{\mu_{\mathrm{in}}} n_{\mathrm{in}} \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}}{\frac{1}{\mu_{\mathrm{in}}} n_{\mathrm{in}} \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + \frac{1}{\mu_{\mathrm{tr}}}\sqrt{n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}} \tag{270}$$

Für den Spezialfall $\mu_{\mathrm{in}} = \mu_{\mathrm{tr}}$ gilt außerdem:

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{\sin\{\theta_{\mathrm{tr}} - \theta_{\mathrm{in}}\}}{\sin\{\theta_{\mathrm{tr}} + \theta_{\mathrm{in}}\}} \tag{271}$$

$$t_{\mathrm{TE}} = \frac{2\sin\{\theta_{\mathrm{tr}}\}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}}{\sin\{\theta_{\mathrm{tr}} + \theta_{\mathrm{in}}\}} \tag{272}$$

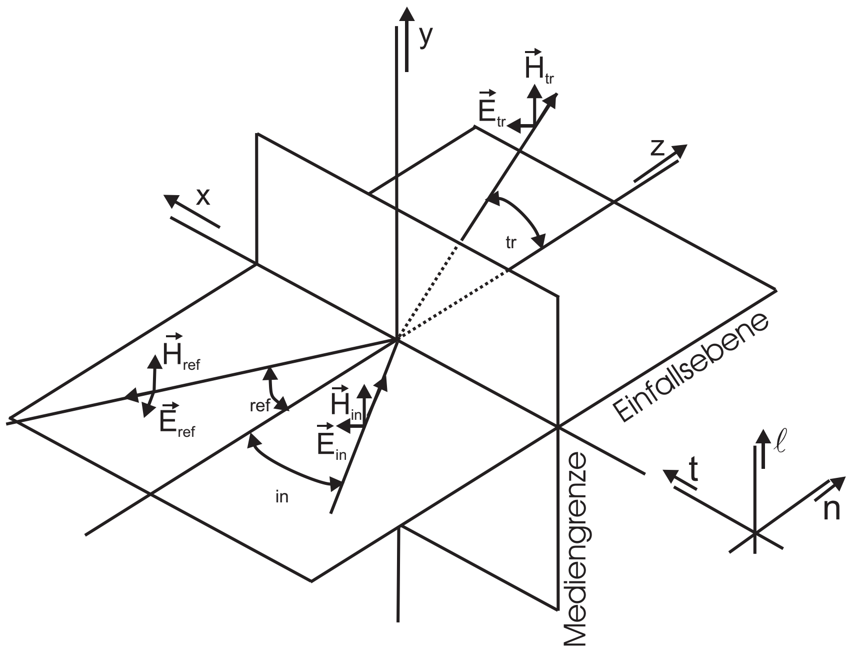
Für die Magnetfelder gilt:

$$\vec{H}_{\mathrm{in}} = E_{\mathrm{in}} \frac{1}{Z_{\mathrm{in}} k_{\mathrm{in}}} \left[(\vec{e}_t \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})\vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})\vec{e}_t\right] \tag{273}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{ref}} = E_{\mathrm{ref}} \frac{1}{Z_{\mathrm{in}} k_{\mathrm{in}}} \left[(\vec{e}_t \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})\vec{n} + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})\vec{e}_t\right] \tag{274}$$

$$\vec{H}_{\mathrm{tr}} = E_{\mathrm{tr}} \frac{1}{Z_{\mathrm{tr}} k_{\mathrm{tr}}} \left[(\vec{e}_t \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})\vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}})\vec{e}_t\right] \tag{275}$$

7.5.4 Amplituden bei Reflexion und Brechung für TM-Wellen



Für TM-Wellen gilt:

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{H_{\mathrm{ref}}}{H_{\mathrm{in}}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}} \right)} = \frac{\mu_{\mathrm{in}} n_{\mathrm{tr}}^2 \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} - \mu_{\mathrm{tr}} n_{\mathrm{in}} \sqrt{n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}}{\mu_{\mathrm{in}} n_{\mathrm{tr}}^2 \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + \mu_{\mathrm{tr}} n_{\mathrm{in}} \sqrt{n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}} \tag{276}$$

$$t_{\mathrm{TM}} = \frac{H_{\mathrm{tr}}}{H_{\mathrm{in}}} = 1 + r_{\mathrm{TM}} = \frac{2\mu_{\mathrm{in}} n_{\mathrm{tr}}^2 \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}}{\mu_{\mathrm{in}} n_{\mathrm{tr}}^2 \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + \mu_{\mathrm{tr}} n_{\mathrm{in}} \sqrt{n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}} \tag{277}$$

Für den Spezialfall $\mu_{\mathrm{in}} = \mu_{\mathrm{tr}}$ gilt außerdem:

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\tan\{\theta_{\mathrm{in}} - \theta_{\mathrm{tr}}\}}{\tan\{\theta_{\mathrm{in}} + \theta_{\mathrm{tr}}\}} \tag{278}$$

Für das E-Feld gilt:

$$\vec{E}_{\mathrm{in}} = H_{\mathrm{in}} \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{in}}} \left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}) \vec{e}_t - (\vec{e}_t \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}) \vec{n} \right] \tag{279}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{ref}} = H_{\mathrm{ref}} \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{in}}} \left[-(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}) \vec{e}_t - (\vec{e}_t \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}) \vec{n} \right] \tag{280}$$

$$\vec{E}_{\mathrm{tr}} = H_{\mathrm{tr}} \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{tr}}} \left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}}) \vec{e}_t - (\vec{e}_t \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}) \vec{n} \right] \tag{281}$$

7.5.5 Brewster-Winkel

Für nichtmagnetische Materialien verschwindet r_{TM} für Einfallswinkel θ_{iB}.
θ_{iB} wird Brewster-Winkel genannt.
In magnetischen Materialien gibt es auch für TE-Wellen einen Brewster-Winkel.

Um die Bedingungen für den Brewsterwinkel einfacher formulieren zu können, führen wir den k-Reflexionsfaktor wie folgt ein:

$$r_k = \frac{\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}}\right)}{\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}}\right)} \tag{282}$$

Mit r_ε und r_μ werden die dielektrischen, bzw. magnetischen Eigenschaften der Grenzfläche beschrieben:

$$r_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\mathrm{in}} - \varepsilon_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}} + \varepsilon_{\mathrm{tr}}} \qquad \text{bzw.} \qquad r_\mu = \frac{\mu_{\mathrm{in}} - \mu_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{in}} + \mu_{\mathrm{tr}}} \tag{283}$$

Für den Brewsterwinkel muss nun folgendes gelten:

TE-Welle:

$$r_k = r_\mu \tag{284}$$

TM-Welle:

$$r_k = r_\varepsilon \tag{285}$$

7.5.6 Intensitätsreflexions- und Intensitätstransmissionsfaktoren

Der **Intensitätsreflexionsfaktor** R und der **Intensitätstransmissionsfaktor** T werden über die zugehörigen zeitgemittelten Poyntingvektoren definiert:

$$R = -\frac{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathrm{ref}}}}{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathrm{in}}}} \tag{286}$$

$$T = \frac{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathrm{tr}}}}{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathrm{in}}}} \tag{287}$$

In verlustlosen Medien gilt:

$$R + T = 1 \tag{288}$$

7.5.7 Totalreflexion

Beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium $n_{\mathrm{in}} > n_{\mathrm{tr}}$ tritt für Einfallswinkel $\theta_{\mathrm{in}} > \theta_{\mathrm{gr}}$ Totalreflexion ein, die Welle wird komplett reflektiert. Für den Grenzwinkel θ_{gr} gilt:

$$\frac{n_{\mathrm{in}}}{n_{\mathrm{tr}}} \sin\{\theta_{\mathrm{gr}}\} = 1 \tag{289}$$

Bei Totalreflexion gilt außerdem:

$$T = 0 \tag{290}$$

$$R = 1 \tag{291}$$