Kochrezept zu Reflexion und Brechung ebener Wellen an ruhender ebener Grenzfläche

Grenzfläche bestimmt durch Normalenvektor $\vec{n}$ und Punkt auf der Fläche $\vec{r}_0$.

Benötigt

$$
\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{\omega\mu\mu_0}\vec{k}\times\vec{E} \\
\vec{E} &= \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{H}\times\vec{k} \\
\vec{\ell} &= \vec{n}\times\vec{k} \\
\|\vec{\ell}\| &= \|\vec{n}\times\vec{k}\| \\
\vec{e}_\ell &= \frac{\vec{\ell}}{\|\vec{\ell}\|} = \frac{\vec{n}\times\vec{k}}{\|\vec{n}\times\vec{k}\|} \\
\vec{E}_{\mathrm{TE}} &= (\vec{e}_\ell \circ \vec{E})\vec{e}_\ell \\
\vec{H}_{\mathrm{TM}} &= (\vec{e}_\ell \circ \vec{H})\vec{e}_\ell \\
\vec{a} &= (\vec{n}\circ\vec{a})\vec{n} + (\vec{n}\times\vec{a})\times\vec{n} \\
\vec{n}\times(\vec{k}_{\mathrm{ref}} - \vec{k}_{\mathrm{in}}) &= 0 \\
\vec{n}\circ(\vec{k}_{\mathrm{ref}} + \vec{k}_{\mathrm{in}}) &= 0 \\
\vec{n}\times(\vec{k}_{\mathrm{tr}} - \vec{k}_{\mathrm{in}}) &= 0 \\
\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}} &= \sqrt{k_{\mathrm{tr}}^2 - \|\vec{n}\times\vec{k}_{\mathrm{in}}\|^2} \\
k^2 &= \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \\
r_{\mathrm{TE}} &= \frac{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}} - \dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}} + \dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}} \\
t_{\mathrm{TE}} &= 1 + r_{\mathrm{TE}} \\
r_{\mathrm{TM}} &= \frac{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}} \\
t_{\mathrm{TM}} &= 1 + r_{\mathrm{TM}}
\end{aligned}
$$

Elektrische Feldstärke einfallend gegeben

$$\vec{E}_{\text{in}} = \vec{E}_{0\text{in}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{in}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\}$$

Gesucht: Reflektierte Welle

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{ref}} &= \vec{E}_{0\text{ref}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{ref}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \qquad \text{oder} \\ \vec{H}_{\text{ref}} &= \vec{H}_{0\text{ref}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{ref}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllllll} \vec{E}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{E}_{0\text{inTE}} & \xrightarrow{r_{\text{TE}}} & \vec{E}_{0\text{refTE}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{ref}}} & \vec{H}_{0\text{refTE}} \\ \downarrow \vec{k}_{\text{in}} & & & & & & \\ \vec{H}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{H}_{0\text{inTM}} & \xrightarrow{r_{\text{TM}}} & \vec{H}_{0\text{refTM}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{ref}}} & \vec{E}_{0\text{refTM}} \end{array}$$

$$\vec{E}_{0\text{ref}} = \vec{E}_{0\text{refTE}} + \vec{E}_{0\text{refTM}}$$

$$\vec{H}_{0\text{ref}} = \vec{H}_{0\text{refTE}} + \vec{H}_{0\text{refTM}}$$

Gesucht: Transmittierte Welle

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tr}} &= \vec{E}_{0\text{tr}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{tr}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \qquad \text{oder} \\ \vec{H}_{\text{tr}} &= \vec{H}_{0\text{tr}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{tr}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllllll} \vec{E}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{E}_{0\text{inTE}} & \xrightarrow{t_{\text{TE}}} & \vec{E}_{0\text{trTE}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{tr}}} & \vec{H}_{0\text{trTE}} \\ \downarrow \vec{k}_{\text{in}} & & & & & & \\ \vec{H}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{H}_{0\text{inTM}} & \xrightarrow{t_{\text{TM}}} & \vec{H}_{0\text{trTM}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{tr}}} & \vec{E}_{0\text{trTM}} \end{array}$$

$$\vec{E}_{0\text{tr}} = \vec{E}_{0\text{trTE}} + \vec{E}_{0\text{trTM}}$$

$$\vec{H}_{0\text{tr}} = \vec{H}_{0\text{trTE}} + \vec{H}_{0\text{trTM}}$$

Magnetische Feldstärke einfallend gegeben

$$\vec{H}_{\text{in}} = \vec{H}_{0\text{in}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{in}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\}$$

Gesucht: Reflektierte Welle

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{ref}} &= \vec{E}_{0\text{ref}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{ref}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \qquad \text{oder} \\ \vec{H}_{\text{ref}} &= \vec{H}_{0\text{ref}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{ref}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{H}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{H}_{0\text{inTM}} & \xrightarrow{r_{\text{TM}}} & \color{green}{\vec{H}_{0\text{refTM}}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{ref}}} & \color{red}{\vec{E}_{0\text{refTM}}} \\ \downarrow \vec{k}_{\text{in}} & & & & & & \\ \vec{E}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{E}_{0\text{inTE}} & \xrightarrow{r_{\text{TE}}} & \color{red}{\vec{E}_{0\text{refTE}}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{ref}}} & \color{green}{\vec{H}_{0\text{refTE}}} \end{array}$$

$$\color{red}{\vec{E}_{0\text{ref}} = \vec{E}_{0\text{refTE}} + \vec{E}_{0\text{refTM}}}$$

$$\color{green}{\vec{H}_{0\text{ref}} = \vec{H}_{0\text{refTE}} + \vec{H}_{0\text{refTM}}}$$

Gesucht: Transmittierte Welle

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{tr}} &= \vec{E}_{0\text{tr}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{tr}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \qquad \text{oder} \\ \vec{H}_{\text{tr}} &= \vec{H}_{0\text{tr}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{tr}} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) - \omega t)\} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{H}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{H}_{0\text{inTM}} & \xrightarrow{t_{\text{TM}}} & \color{green}{\vec{H}_{0\text{trTM}}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{tr}}} & \color{red}{\vec{E}_{0\text{trTM}}} \\ \downarrow \vec{k}_{\text{in}} & & & & & & \\ \vec{E}_{0\text{in}} & \xrightarrow{\vec{e}_\ell} & \vec{E}_{0\text{inTE}} & \xrightarrow{t_{\text{TE}}} & \color{red}{\vec{E}_{0\text{trTE}}} & \xrightarrow{\vec{k}_{\text{tr}}} & \color{green}{\vec{H}_{0\text{trTE}}} \end{array}$$

$$\color{red}{\vec{E}_{0\text{tr}} = \vec{E}_{0\text{trTE}} + \vec{E}_{0\text{trTM}}}$$

$$\color{green}{\vec{H}_{0\text{tr}} = \vec{H}_{0\text{trTE}} + \vec{H}_{0\text{trTM}}}$$