Elektromagnetische Felder und Wellen

Name :

Matrikelnummer :

Kurzaufgaben

Aufgabe 1.1:

Aufgabe 1.2:

Aufgabe 1.3:

Aufgabe 1.4:

$\sum$ Kurzaufgaben:

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

Aufgabe 4:

Summe:

Note:

Klausur Herbst 1998

Kurzfragen

Bewerten Sie die in den folgenden Aufgaben gemachten Aussagen. Für jede richtige Bewertung gibt es einen Punkt, bei falscher Bewertung wird ein Punkt abgezogen, keine Bewertung ergibt Null Punkte. Die Summe der Punkte pro Teilaufgabe ist minimal Null Punkte.

Aufgabe 1.1 (5 Punkte)

Was versteht man unter dem magnetischen Vektorpotential $\vec{A}$ und wie kann man es berechnen?

Richtig	Falsch	
○	○	$\vec{A}$ ist als rein mathematische Hilfsgröße eingeführt worden.
○	○	Aus $\nabla \circ \vec{A}$ folgt das Magnetfeld $\vec{H}$.
○	○	$\vec{A}$ kann durch direkte Lösung ("Integration") einer der Poissongleichung ähnlichen Differentialgleichung bestimmt werden.
○	○	$\vec{A}$ ist eine Größe mit der Dimension Spannung · Zeit / Länge.
○	○	In elektrodynamischen Feldern ist $\vec{A}$ eines der retardierten Potentiale.

Aufgabe 1.2 (5 Punkte)

Mit welchen stichwortartig charakterisierten Methoden oder Gesetzmäßigkeiten lassen sich die magnetischen Felder stromdurchflossener Leiter berechnen?

Richtig	Falsch	
○	○	Ladungserhaltungssatz.
○	○	Aus dem Pointingvektor.
○	○	Aus der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes.
○	○	Über eine skalare Potentialfunktion.
○	○	Aus der Lorentzeichung.

Kurzaufgaben

Aufgabe 1.3 (5 Punkte)

Gegeben ist ein ideal leitfähiges geerdetes Rohr der Länge $2L$ mit rechteckigem Querschnitt. Das Koordinatensystem sei so gewählt, daß sich die Innenseiten der Rohrwände bei $x = 0, y = 0, x = a$ und $y = b$ im Bereich $-L \leq z \leq L$ befinden. An den Enden sind die Potentiale $V\{z = L\} = V_e\{x, y\} + V_o\{x, y\}$ und $V\{z = -L\} = V_e\{x, y\} - V_o\{x, y\}$ eingeprägt. Auf den Wänden ist das Potential $V = 0$.
Skizzieren Sie die Anordnung. Wie lautet der vollständige Lösungsansatz für das Potential im ladungsfreien Innenraum des Hohlrohrs, der alle Randbedingungen auf den Wänden erfüllt? Wie hängen die Koeffizienten des Ansatzes mit den Potentialen V_e und V_o zusammen (Integralausdrücke)?
Eine andere Lösungsmethode kann verwendet werden, wenn die Greenschen Funktion des Problems bekannt ist. Wie lautet die allgemeine Lösung der Poissongleichung mit Greenschen Funktionen für ladungsfreie Gebiete? Wie lautet der übrigbleibende Integralausdruck in der allgemeinen Lösung, wenn die Randbedingungen auf den Wänden beachtet werden? Beachten Sie $\nabla A \circ \vec{e_u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} A$.

Aufgabe 1.4 (5 Punkte)

Zwei leitfähige Dielektrika grenzen aneinander. Eine Stetigkeitsbedingung für die dielektrische Verschiebung (Verschiebungsdichte) ist im Fall allgemeiner Zeitabhängigkeit in isotropen Medien gesucht. Im zweiten Schritt soll die Stetigkeitsbedingung für den Spezialfall harmonischer Zeitabhängigkeit in homogenen Medien erarbeitet werden.
Wie lautet die Stetigkeitsbedingung, die aus dem differentiellen Gaußschen Satz für die zeitabhängige dielektrische Verschiebung an einer geladenen Grenzfläche folgt? Welche Stetigkeitsbedingung folgt aus der Kontinuitätsgleichung für die elektrische Stromdichte bei allgemeiner Zeitabhängigkeit und geladener Grenzfläche?
Nehmen Sie im folgenden eine harmonische Zeitabhängigkeit mit $\exp\{-i\omega t\}$ und homogene lineare Medien auf beiden Seiten der Grenzfläche an. Ersetzen Sie die Stromdichte mit Hilfe des mikroskopischen Ohmschen Gesetzes durch die Verschiebungsdichte.
Welche Stetigkeitsbedingung resultiert für die komplexe Verschiebungsdichte aus den Stetigkeitsbedingungen, wenn die Grenzflächenladung in den Gleichungen eliminiert wird?

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Gustav Kirchhoff hat eine Methode angegeben, mit der die sogenannte Streukapazität eines Plattenkondensators endlicher Ausdehnung abgeschätzt werden kann. Das Vorgehen soll in dieser Aufgabe nachvollzogen werden.
Die Elektroden eines Parallelplattenkondensators sind senkrecht zur komplexen z-Ebene ($z = x + iy$) angeordnet. Der Randbereich kann mit Hilfe einer konformen Abbildung auf die u-Achse der komplexen w-Ebene ($w = u + iv$) abgebildet werden. Leider läßt sich nur die Abbildung von der w- in die z-Ebene mit $z = \frac{d}{\pi}\left(\frac{1-w^2}{2} + \operatorname{Ln}\{w\}\right)$ angeben. Das komplexe Potential in der w-Ebene lautet $V\{w\} = \frac{V_0}{\pi}\operatorname{Ln}\{w\}$, $V_0 > 0$. Das reelle Potential wird mit $V_R = \operatorname{Im}\{V\}$ aus dem Imaginärteil gewonnen. Der Hauptwert des komplexen Logarithmus ist durch $\operatorname{Ln}\{w\} = \ln\{|w|\} + i\arg\{w\}$ mit $\arg\{w\} = \arctan\{\frac{v}{u}\}$ gegeben.

a) Wie lauten die Ableitungen des Real- und Imaginärteils von $V\{w\} = \Phi\{w\} + i\,\Psi\{w\}$ nach u und v? Sind die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt?

b) Berechnen Sie die Werte von $w = w_{ext} = u_{ext} + iv_{ext}$, an denen $z(w)$ Extrema besitzt.

c) Skizzieren Sie das Bild der positiven und der negativen u-Achse in der z-Ebene. Beachten Sie die Umgebung von $u = u_{ext}$.

d) Wohin wird der obere Halbraum der w-Ebene nahe der u-Achse abgebildet? Als Antwort genügt die Angabe der Zugehörigkeit zum Elektrodenzwischenraum bzw. -außenraum des Kondensators. Beachten Sie die Extrema, die die u-Achse in verschiedene Bereiche unterteilen. Hilfe: Wohin werden die vier Punkte $w_{1,2} = \pm 0.5 + i0.001$, $w_{3,4} = \pm 2 + i0.001$ abgebildet? Verwenden Sie $\ln\{2\} \approx 0.7$.

e) Wie lautet die Potentialverteilung von V_R auf der u-Achse? Tragen Sie das Ergebnis in die Skizze aus c) ein.

f) Handelt es sich hier um ein Original- oder Dualproblem? Welche komplexe elektrische Feldstärke herrscht auf der u-Achse in der w-Ebene?

g) Welche komplexe elektrische Feldstärke $E = E_x + iE_y$ herrscht im Raum und speziell auf den Elektroden in der z-Ebene? Verwenden Sie die parametrische Darstellung mit komplexem Parameter w.

h) Punkte mit Abstand L vom Rand der positiv geladenen Elektrode in der $z-$ Ebene sind Bilder von u_1 und u_2. Der Punkt u_1 wird auf die Innenseite, der Punkt u_2 auf die Außenseite der Elektrode abgebildet. Geben Sie den Zusammenhang zwischen u_1 und u_2 sowie den Wertebereich von u_1 und u_2 an. Hinweis: Die Gleichungen lassen sich nicht nach u_1 und u_2 auflösen.

i) Für breite Kondensatoren $L \gg d$ können Näherungen erster Ordnung für u_1 und u_2 gefunden werden. Wie lauten diese Näherungen? Hilfe: $|\ln\{a\}| \ll a^2$ für $a^2 \gg 1$ und $|\ln\{a\}| \gg a^2$ für $a^2 \ll 1$.

k) Die positive Kondensatorelektrode in der z- Ebene trägt auf dem Randbereich der Breite L die längenbezogene Ladung q'. Genau dieselbe Ladung befindet sich auf der Oberseite der u- Achse im Bereich zwischen u_1 und u_2. Wie groß ist näherungsweise q' für $L \gg d$?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Zwischen zwei Hochhäusern, die in einem Abstand von $L = 100\,\mathrm{m}$ stehen, soll eine Freistrahlübertragung zum Datenaustausch aufgebaut werden. Um eine gewisse Abhörsicherheit zu gewährleisten, soll das gesendete Signal möglichst gut auf den Empfänger gerichtet werden. Sender (bei $z = 0$) und Empfänger (bei $z = L$) werden als aufeinander ausgerichtete Parabolantennen ausgelegt. Die Senderantenne wird so angesteuert, daß die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}(r, \varphi, z = 0) = E_0 \exp\{-[r/r_1]^2\} \exp\{+i\delta_1 r^2\} \exp\{-i\omega t\}\vec{e}_x$$

mit $r^2 = x^2 + y^2$ lautet. Durch geeignete Wahl von r_1 und δ_1 wird ein gute Fokussierung auf den Empfänger erreicht. Die Trägerfrequenz beträgt $\omega/2\pi = 10\,\mathrm{GHz}$. Das kartesische Koordinatensystem soll so gewählt werden, daß die Mittelpunkte beider Antennen auf der z-Achse liegen.

a) Welche Wellenlänge wird benutzt?

b) Skizzieren Sie die Anordnung in der x-z-Ebene.

c) Wie lautet der Integralausdruck der elektrischen Feldstärke am Ort der Empfangsantenne in der Fresnelnäherung? Verwenden Sie kartesische Koordinaten.

d) Trennen Sie den Integralausdruck je nach x- und y-Abhängigkeit in zwei Terme. Sortieren Sie dabei nach Potenzen der Integrationsvariablen.

e) Zur Berechnung der Integralausdrücke soll

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-[\alpha^2 x^2 + \beta x + \gamma]\right\}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \exp\left\{\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \gamma\right\}$$

verwendet werden. Ordnen Sie α^2, β, γ in jedem Integral zu und berechnen Sie die Integrale. Fassen Sie das Ergebnis mit $r^2 = x^2 + y^2$ zusammen.

f) Trennen Sie das Argument der Exponentialfunktion nach Realteil und Imaginärteil auf.

g) Wie lauten die Ausdrücke für r_2 und δ_2 in der Ebene der Empfangsantenne, welche die analogen Größen zu r_1 und δ_1 darstellen.

h) Wie muß δ_1 gewählt werden, damit r_2 minimal wird? (Für eine möglichst gute Fokussierung)

i) Welches δ_2 ergibt sich für dieses δ_1?

k) Um die Fläche beider Antennen gering zu halten, wird $r_2 = r_1$ gewählt. Wie lautet der Ausdruck für r_1?

Die oben angenommene Feldverteilung am Ort der Senderantenne ist unendlich ausgedehnt, während die Antennen natürlich nur eine endliche Ausdehnung haben können. Der Durchmesser $2R_0$ der Antennen soll so gewählt werden, daß etwa 98 % der idealen Leistung abgestrahlt wird. Da die Energiestromdichte am Ort des Senders mit $\vec{S}(r) \propto |E_x(r)|^2 \vec{e}_z$ genähert werden kann, ist also

$$\iint\limits_{\text{Antenne}} |E_x(r)|^2 \, d^2S \Big/ \iint\limits_{\infty} |E_x(r)|^2 \, d^2S = 98\,\%$$

zu berechnen (d^2S ist hier das Oberflächenelement in Zylinderkoordinaten!).
Hinweis: $\exp(-4) \approx 2\,\%$
Wenn Sie r_1 nicht berechnen konnten, verwenden Sie $r_1 = \sqrt{L\lambda}$

l) Wie groß muß R_0 werden, damit die 98 %-Bedingung erfüllt ist? Geben Sie hier auch den Zahlenwert an.

m) Eine andere Sende- und Empfangsanlage wird mit Laserdioden betrieben. Die Phasenkrümmung wird mittels Linsen erreicht, so daß sich prinzipiell die gleiche Anordnung ergibt. Die Wellenlänge beträgt nun $1\,\mu$m. Wie groß ist die laterale Ausdehnung der Linse $2R_0'$ zu wählen? (Zahlenwert)

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Eine ebene Welle mit beliebiger Polarisation, die durch $\vec{E}_i = \vec{E}_{i0} \exp\{i(\vec{k}_i\vec{r} - \omega_i t)\}$ gegeben ist, breite sich im Vakuum in beliebiger Richtung mit $k_x > 0$ aus. Sie trifft an der Stelle x=0 auf ein Gebiet unendlicher Leitfähigkeit σ, die den gesamten Halbraum $x \geq 0$ ausfüllt. Dieses Problem kann man sich durch einen Metallspiegel, der durch $\vec{n} \circ \vec{r} = 0$ gegeben ist, realisiert denken. Die an der Grenzfläche reflektierte Welle ist durch

$\vec{E}_r = \vec{E}_{r0} \exp\{i(\vec{k}_r\vec{r} - \omega_r t)\}$ gegeben. Die Amplituden der einfallenden und reflektierten Welle ($\vec{E}_{i0}$ bzw. $\vec{E}_{r0}$) seien reell. Die im Skript angebenen Formeln zur Berechnung der Reflexion einer ebenen Welle an einer dielektrischen Grenzfläche gelten nur für ladungs- und stromfreie Oberflächen. Diese Forderung ist auf einer Metalloberfläche nicht mehr erfüllt. Das Vorgehen zur Berechnung dieses Problems ist dem im Skript angegebenen Weg aber sehr ähnlich.

a) Fertigen Sie eine Skizze des oben beschriebenen Problems an. Wie lautet der Normalenvektor $\vec{n}$?

b) Geben Sie die Stetigkeitsbedingung für das gesamte $\vec{E}$-Feld an der Grenzfläche $x = 0$ an. Welche Komponenten hat das resultierende elektrische Feld an der Grenzfläche?

c) Die Stetigkeitsbedingung muß zu jedem Zeitpunkt t und an jedem Ort $\vec{r}$ mit $\vec{r} \circ \vec{n} = 0$ erfüllt sein. Was resultiert für die Argumente der exp-Funktion? Was folgt daraus für $\vec{k}_r$ und ω_r?

d) Die Differenz der Wellenvektoren $\vec{k}_r - \vec{k}_i = \Delta k \vec{e}_d$ bzw. $\vec{e}_d \circ (\vec{k}_r - \vec{k}_i) = \Delta k$ enthält den Einheitsvektor $\vec{e}_d$. Wie lautet $\vec{e}_d$ und was ergibt sich aus dem Produkt $(\vec{k}_r - \vec{k}_i) \circ (\vec{k}_r + \vec{k}_i)$ für $\vec{k}_r \circ \vec{e}_d$ unter Berücksichtigung der Dispersionsrelation und $\Delta k \neq 0$?

e) Wie groß ist Δk aus Teilaufgabe d) und damit $\vec{k}_r$? Stellen Sie $\vec{k}_r$ in der Form

$$\vec{k}_r = A \cdot \vec{k}_i + B \cdot \left(\vec{k}_i \circ \vec{e}_d\right) \cdot \vec{e}_d$$

dar. Wenn Sie $\vec{k}_r$ nicht berechnen können, verwenden Sie den angebenen Ausdruck mit $A = -1$, $B = 2$ und $\vec{e}_d = \vec{e}_z$.

f) Für ebene Wellen gilt $\vec{k} \circ \vec{E} = 0$. Wie lautet die Summe $\vec{k}_i \circ \vec{E}_i + \vec{k}_r \circ \vec{E}_r = 0$ unter Berücksichtigung von Teilaufgabe b).

g) Wie lautet der Zusammenhang zwischen $\vec{E}_{r0}$ und $\vec{E}_{i0}$? Die Lösung hat die Form

$$\vec{E}_{r0} = a\vec{E}_{i0} + b\left(\vec{n} \circ \vec{E}_{i0}\right)\vec{n}$$

Bestimmen Sie a und b. Falls Sie das Ergebnis nicht gefunden haben, rechnen Sie mit $a = 1$ und $b = -2$ weiter.

Eine in y-Richtung linear polarisierte ebene Welle trifft senkrecht auf die Grenzfläche.

h) Skizzieren Sie das Problem und geben Sie $\vec{k}_i$ und $\vec{E}_{i0}$ für diesen Fall an.

i) Schreiben Sie den Ausdruck für das gesamte $\vec{E}$-Feld im Halbraum $x \leq 0$ hin und bilden Sie $\mathrm{Re}\{\vec{E}\}$.

k) Berechnen Sie $\vec{H}_i$, $\vec{H}_r$ sowie das gesamte $\vec{H}$-Feld und bilden Sie $\mathrm{Re}\{\vec{H}\}$.

l) Ermitteln Sie die Energiedichte w der ebenen Welle. Was ergibt sich für die Energiedichte bei Zeitmittelung?

m) Berechnen Sie den Poyntingvektor $\vec{S}$. Was ergibt sich bei Zeitmittelung und welche physikalische Interpretation ergibt sich aus diesem Ergebnis.