Kurzfragen

Aufgabe 1.1

Was versteht man unter dem magnetischen Vektorpotential $\vec{A}$ und wie kann man es berechnen?

Richtig	Falsch	
⊗	○	$\vec{A}$ ist als rein mathematische Hilfsgröße eingeführt worden.
○	⊗	Aus $\nabla \circ \vec{A}$ folgt das Magnetfeld $\vec{H}$. *Richtig ist* $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$
⊗	○	$\vec{A}$ kann durch direkte Lösung (“Integration”) einer der Poissongleichung ähnlichen Differentialgleichung bestimmt werden.
⊗	○	$\vec{A}$ ist eine Größe mit der Dimension Spannung · Zeit / Länge.
⊗	○	In elektrodynamischen Feldern ist $\vec{A}$ eines der retardierten Potentiale.

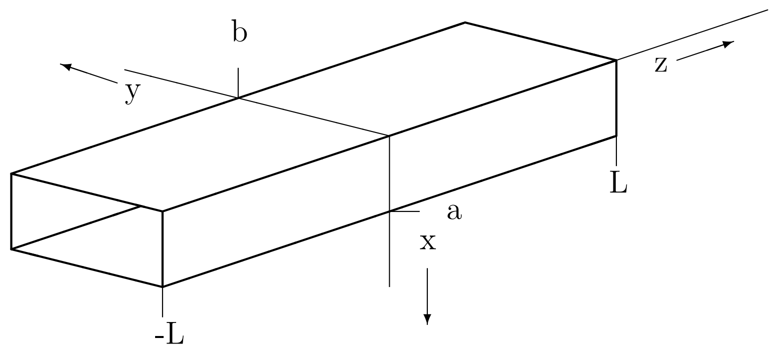
Aufgabe 1.2

Mit welchen stichwortartig charakterisierten Methoden oder Gesetzmäßigkeiten lassen sich die magnetischen Felder stromdurchflossener Leiter berechnen?

Richtig	Falsch	
○	⊗	Ladungserhaltungssatz. *Der Ladungserhaltungssatz verknüpft Stromdichte und elektrische Ladungsdichte.*
○	⊗	Aus dem Poyntingvektor. *Der Poyntingvektor steht senkrecht zu* $\vec{H}$ *und wird aus* $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ *gebildet. Nur in Spezialfällen (zum Beispiel ebene Wellen) kann die Größe von* $\vec{H}$ *auus* $\vec{S}$ *bestimmt werden.*
○	⊗	Aus der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes. *In der Energiedichte steht zum einen nur der Betrag der Felder und zum anderen die Summe der elektrischen und der magnetischen Feldenergiedichte.*
○	⊗	Über eine skalare Potentialfunktion. *Das skalare magnetische Potential gilt nur in Gebieten mit* $\vec{j} = 0$.
○	⊗	Aus der Lorentzeichung. *Die Lorentzeichung gibt nur eine Bedingung zur Entkopplung der Potentiale in den Wellengleichungen an.*

Kurzaufgaben

Aufgabe 1.3



Der Vollständige Lösungsansatz, der die Randbedingungen auf den Wänden erfüllt lautet

$$V = \sum_m \sum_n \left(A_{m,n}\frac{\sinh\{\beta_{m,n}z\}}{\sinh\{\beta_{m,n}L\}} + B_{m,n}\frac{\cosh\{\beta_{m,n}z\}}{\cosh\{\beta_{m,n}L\}}\right)\sin\{m\pi\frac{x}{a}\}\sin\{n\pi\frac{y}{b}\}$$

mit $\beta_{m,n} = \pi\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}$. Bei $z = L$ bzw. $z = -L$ ergibt die Orthogonalentwicklung

$$\begin{aligned} A_{m,n} + B_{m,n} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b (V_e\{x',y'\} + V_o\{x',y'\})\sin\{m\pi\frac{x'}{a}\}\sin\{n\pi\frac{y'}{b}\}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\ -A_{m,n} + B_{m,n} &= \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b (V_e\{x',y'\} - V_o\{x',y'\})\sin\{m\pi\frac{x'}{a}\}\sin\{n\pi\frac{y'}{b}\}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,. \end{aligned}$$

Nach Addition bzw. Subtraktion beider Gleichungen resultiert

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \tfrac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b V_e\{x',y'\}\sin\{m\pi\tfrac{x'}{a}\}\sin\{n\pi\tfrac{y'}{b}\}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\ B_{m,n} &= \tfrac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b V_o\{x',y'\}\sin\{m\pi\tfrac{x'}{a}\}\sin\{n\pi\tfrac{y'}{b}\}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \end{aligned}$$

und damit

$$V = \sum_m \sum_n \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \left(V_e\{x',y'\}\frac{\sinh\{\beta_{m,n} z\}}{\sinh\{\beta_{m,n} L\}} + V_o\{x',y'\}\frac{\cosh\{\beta_{m,n} z\}}{\cosh\{\beta_{m,n} L\}}\right) \sin\{m\pi\frac{x'}{a}\}\sin\{n\pi\frac{y'}{b}\}\sin\{m\pi\frac{x}{a}\}\sin\{n\pi\frac{y}{b}\}\,.$$

Die allgemeine Lösung der Poissongleichung lautet in ladungsfreien Gebieten

$$\begin{aligned} V &= -\iint_{\rho_K} f\{\vec{r'}\}\nabla' G \circ \mathrm{d}^2\vec{S'} \\ &= -\int_{x'=0}^{a}\int_{y'=0}^{b} (V_e + V_o)\nabla' G|_{z'=L} \circ \vec{e_z} - (V_e - V_o)\nabla' G|_{z'=-L} \circ \vec{e_z}\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \\ &= -\int_{x'=0}^{a}\int_{y'=0}^{b} V_e(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G|_{z'=L} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G|_{z'=-L}) + V_o(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G|_{z'=L} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G|_{z'=-L})\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\,. \end{aligned}$$

An dieser Stelle ist die Lösung der Aufgabe beendet. Aus dem Vergleich zwischen der allgemeinen Lösung mit dem Reihenansatz findet man leicht nach einmaliger Integration unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme für die Hyperbelfunktionen die Greensche Funktion des Rechteckrohres

$$G\{r,r'\} = \sum_m \sum_n \frac{4}{ab\beta_{m,n}} \sin\{m\pi\frac{x'}{a}\}\sin\{n\pi\frac{y'}{b}\}\sin\{m\pi\frac{x}{a}\}\sin\{n\pi\frac{y}{b}\}\frac{\cosh\{\beta_{m,n}(z+z')\}}{\sinh\{\beta_{m,n}2L\}}\,.$$

Aufgabe 1.4

Aus dem Gaußschen Gesetz für die dielektrische Verschiebung $\nabla \circ \vec{D} = \rho$ resultiert

$$\vec{n} \circ (\vec{D_2} - \vec{D_1}) = \rho_s\,.$$

Die Kontinuitätsgleichung $\nabla \circ \vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = 0$ führt auf

$$\vec{n} \circ (\vec{j_2} - \vec{j_1}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho_s\,.$$

Bei harmonischer Zeitabhängigkeit kann die Zeitableitung durch einen Faktor $i\omega$ ersetzt werden. In linearen Medien gilt außerdem $\vec{j} = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}\vec{D}$. Einsetzen in die Stetigkeitsbedingung für $\vec{j}$ ergibt

$$\vec{n} \circ \left(\frac{\sigma_2}{\epsilon_2\epsilon_0}\vec{D_2} - \frac{\sigma_1}{\epsilon_1\epsilon_0}\vec{D_1}\right) = i\omega\rho_s\,.$$

Eliminieren der Grenzflächenladung in der ersten und letzten Stetigkeitsbedingung führt auf

$$\vec{n} \circ \left(\left(\frac{\sigma_2}{\epsilon_2\epsilon_0} - i\omega\right)\vec{D_2} - \left(\frac{\sigma_1}{\epsilon_1\epsilon_0} - i\omega\right)\vec{D_1}\right) = 0\,.$$

An dieser Stelle ist die Aufgabe gelöst. Durch ausklammern von $-i\omega$ kann man aber die Gleichung noch weiter umformen und erhält nach kürzen um ϵ_0 mit den komplexen relativen Dielektrizitätskonstanten $\bar{\epsilon}$ den Ausdruck

$$\vec{n} \circ \left(\frac{\bar{\epsilon}_2}{\epsilon_2}\vec{D_2} - \frac{\bar{\epsilon}_1}{\epsilon_1}\vec{D_1}\right) = 0\,.$$

Aufgabe 2

Aufgabe 2

a) Komplexes Potential in der z-Ebene

$$\begin{aligned} V\{w\} &= \frac{V_0}{\pi}\mathrm{Ln}\{w\} \\ &= \frac{V_0}{\pi}\left(\ln\{|w|\} + \mathrm{i}\arg\{w\}\right) \end{aligned}$$

Realteil des komplexen Potentials

$$\Phi\{w\} = \mathrm{Re}\{V\{w\}\} = \frac{V_0}{\pi}\ln\{|w|\}$$

Ableitungen des Realteils

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\Phi\{u,v\} &= \frac{V_0}{\pi}\frac{1}{|w|}\frac{\partial|w|}{\partial u} \\ &= \frac{V_0}{\pi}\frac{u}{u^2+v^2} \\ \frac{\partial}{\partial v}\Phi\{u,v\} &= \frac{V_0}{\pi}\frac{v}{u^2+v^2} \end{aligned}$$

Imaginärteil des komplexen Potentials

$$\Psi\{w\} = \mathrm{Im}\{V\{w\}\} = \frac{V_0}{\pi}\arg\{w\}$$

Ableitungen des Imaginärteils

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\Psi\{u,v\} &= \frac{V_0}{\pi}\frac{\partial}{\partial u}\left\{\arctan\left\{\frac{v}{u}\right\}\right\} \\
&= \frac{V_0}{\pi}\frac{1}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}\left(\frac{-v}{u^2}\right) \\
&= -\frac{V_0}{\pi}\frac{v}{u^2+v^2} \\
\frac{\partial}{\partial v}\Psi\{u,v\} &= \frac{V_0}{\pi}\frac{u}{u^2+v^2}
\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen sind erfüllt, da

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\Phi\{u,v\} &= \frac{\partial}{\partial v}\Psi\{u,v\} \\
\frac{\partial}{\partial v}\Phi\{u,v\} &= -\frac{\partial}{\partial u}\Psi\{u,v\}
\end{aligned}$$

b) Extrema von $z\{w\}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial w}\right|_{w_{ext}} = \frac{d}{\pi}\left(-w_{ext}+\frac{1}{w_{ext}}\right) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow w_{ext}^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
w_{ext,1} &= u_{ext,1} + \mathrm{i}v_{ext,1} = 1 + \mathrm{i}0 \\
w_{ext,2} &= u_{ext,2} + \mathrm{i}v_{ext,2} = -1 + \mathrm{i}0
\end{aligned}$$

c) Bild der u-Achse in der z-Ebene

$$z\{u+\mathrm{i}0\} = \frac{d}{\pi}\Big(\underbrace{\frac{1-u^2}{2} + \ln\{|u|\}}_{\leq 0} + \mathrm{i}\arg\{(u)\}\Big)$$

Bild der positiven und negativen u-Achse

$$\begin{aligned}
z\{u+\mathrm{i}0\} &\stackrel{u\geq 0}{=} \frac{d}{\pi}\left(\frac{1-u^2}{2} + \ln\{u\} + \mathrm{i}0\right) \\
z\{u+\mathrm{i}0\} &\stackrel{u\leq 0}{=} \frac{d}{\pi}\left(\frac{1-u^2}{2} + \ln\{-u\} + \mathrm{i}\pi\right)
\end{aligned}$$

d) Bild des oberen Halbraumes nahe der u-Achse in der z-Ebene

$$\begin{aligned}
z &= \frac{d}{\pi}\left(\frac{1-w^2}{2} + \mathrm{Ln}\{w\}\right) \\
\mathrm{Re}\{z\} &= \frac{d}{\pi}\left(\frac{1-\mathrm{Re}\{w\}^2 + \mathrm{Im}\{w\}^2}{2} + \ln\{|w|\}\right) \\
\mathrm{Im}\{z\} &= \frac{d}{\pi}\Big(-\mathrm{Re}\{w\}\,\mathrm{Im}\{w\} + \arg\{w\}\Big)
\end{aligned}$$

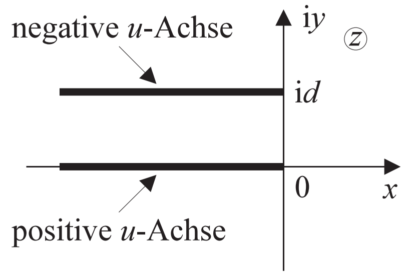


Abbildung der u- Achse in die z- Ebene.

$$\begin{array}{l} w_1 = 0.5 + \mathrm{i}0.001 \\ \arg\{w_1\} = \arctan\{0.002\} \end{array} \Rightarrow z_1 \approx \frac{d}{\pi}(-0.32 + \mathrm{i}0.00015)$$

$$\begin{array}{l} w_2 = -0.5 + \mathrm{i}0.001 \\ \arg\{w_2\} = \pi - \arctan\{0.002\} \end{array} \Rightarrow z_2 \approx \frac{d}{\pi}(-0.32 + \mathrm{i}(\pi - 0.00015))$$

$$\begin{array}{l} w_3 = 2 + \mathrm{i}0.001 \\ \arg\{w_3\} = \arctan\{0.0005\} \end{array} \Rightarrow z_3 \approx \frac{d}{\pi}(-0.81 - \mathrm{i}0.00015)$$

$$\begin{array}{l} w_4 = -2 + \mathrm{i}0.001 \\ \arg\{w_4\} = \pi - \arctan\{0.0005\} \end{array} \Rightarrow z_4 \approx \frac{d}{\pi}(-0.81 + \mathrm{i}(\pi + 0.00015))$$

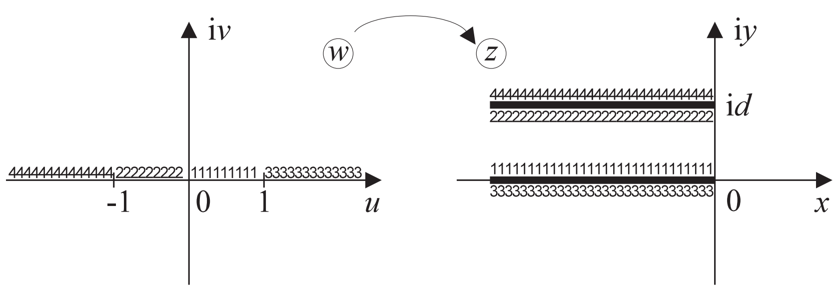


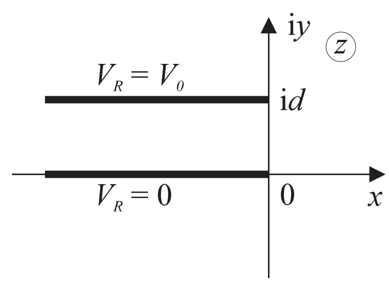
Bild der oberen $w-$ Halbebene in der z- Ebene. (Skizze war nicht gefragt)

e) Potentialverteilung von V_R auf der u-Achse

$$V_R\{w\} = \mathrm{Im}\{V\{w\}\} = \frac{V_0}{\pi}\arg\{w\}$$

$$\arg\{u + \mathrm{i}0\} = \begin{cases} 0 & ; \quad u > 0 \\ \pi & ; \quad u < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_R\{u+\mathrm{i}0\} = \begin{cases} 0 & ; \quad u > 0 \\ V_0 & ; \quad u < 0 \end{cases}$$



Potentialverteilung auf der u- Achse.

f) $V_R = \mathrm{Im}\{V\} \Rightarrow$ Dualproblem.

Komplexe elektrische Feldstärke in der w-Ebene beim Dualproblem

$$\begin{aligned} E_w^* &= \mathrm{i}\nabla_w V \\ &= \mathrm{i}\frac{V_0}{\pi w} \\ E_w &= \frac{V_0}{\mathrm{i}\pi w^*} \end{aligned}$$

Komplexe Feldstärke auf der u-Achse

$$E_w\{u+\mathrm{i}0\} = \frac{V_0}{\mathrm{i}\pi u}$$

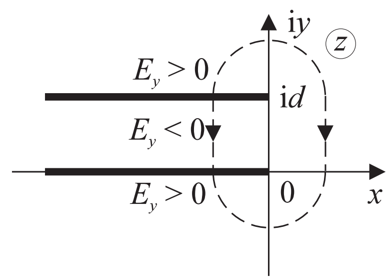
g) Komplexe elektrische Feldstärke in der z-Ebene

$$\begin{aligned} E_z^* &= \mathrm{i}\nabla_z V\{w\{z\}\} \\ &= \mathrm{i}(\nabla_z w)\nabla_w V \\ &= (\nabla_w z)^{-1} E_w^* \\ &\overset{f)}{=} \mathrm{i}\frac{V_0}{\pi w}\left(\frac{d}{\pi}\left(-w+\frac{1}{w}\right)\right)^{-1} \\ &= \frac{\mathrm{i}V_0}{d}\left(\frac{1}{1-w^2}\right) \end{aligned}$$

Elektrische Feldstärke auf den Elektroden ($\Rightarrow v = 0$)

$$E_z = -\frac{\mathrm{i}V_0}{d}\left(\frac{1}{1-u^2}\right)$$

$$\begin{aligned} E_x &= \operatorname{Re}\{E_z\} \\ &= 0 \\ E_y &= \operatorname{Im}\{E_z\} \\ &= \frac{V_0}{d}\left(\frac{1}{u^2-1}\right) \end{aligned}$$



Feldlinienbild (war nicht gefragt).

h) Punkte im Abstand L vom Rand der positiv geladenen Elektrode in der z-Ebene ($\Rightarrow u < 0; v = 0$)

$$\begin{aligned} -L &= \frac{d}{\pi}\left(\frac{1-u_1^2}{2} + \ln\{|u_1|\}\right) \\ &= \frac{d}{\pi}\left(\frac{1-u_2^2}{2} + \ln\{|u_2|\}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Innenseite} &\Rightarrow -1 < u_1 < 0 \\ \text{Außenseite} &\Rightarrow u_2 < -1 \end{aligned}$$

i) Näherungen für u_1 und u_2 für $L \gg d$

$$\begin{aligned} \frac{u_{1,2}^2}{2} - \ln\{|u_{1,2}|\} &= \left(\frac{\pi L}{d} + \frac{1}{2}\right) \\ &\overset{L \gg d}{\approx} \frac{\pi L}{d} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1^2 \ll 1 &\Rightarrow -\ln\{|u_1|\} \gg \frac{u_1^2}{2} \\ &\Rightarrow -\ln\{|u_1|\} \approx \frac{\pi L}{d} \\ u_2^2 \gg 1 &\Rightarrow \ln\{|u_2|\} \ll \frac{u_2^2}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_2^2}{2} \approx \frac{\pi L}{d}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\{|u_2|\} \approx \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{2\pi L}{d}\right\}$$

j) Längenbezogene Ladung auf der positiv geladenen Kondensatorelektrode auf dem Randbereich der Breite L

$$q' = \int_{u_1}^{u_2} \epsilon_0 E_v\{u + \mathrm{i}0\}\, du$$

$$\begin{aligned} E_v\{u+\mathrm{i}0\} &= \mathrm{Im}\{E_w\{u+\mathrm{i}0\}\} \\ &\overset{f)}{=} -\frac{V_0}{\pi u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow q' &= -\frac{V_0\epsilon_0}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{1}{u}du \\ &= \frac{V_0\epsilon}{\pi}\int_{-u_1}^{-u_2}\frac{1}{u}du \\ &= \frac{V_0\epsilon_0}{\pi}\{\ln\{-u_2\} - \ln\{-u_1\}\} \\ &\overset{L\gg d,i)}{\approx} \frac{V_0\epsilon_0}{\pi}\left\{\frac{\pi L}{d} + \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{2\pi L}{d}\right\}\right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow q' = \Bigg(\epsilon_0\frac{L}{d} + \underbrace{\frac{\epsilon_0}{2\pi}\ln\left\{\frac{2\pi L}{d}\right\}}_{Streuanteil}\Bigg)V_0$$

Anmerkung

Die längenbezogene Kapazität C_i' eines idealen Kondensators und die Kapazität C' des hier vorliegenden Kondensators lauten

$$C_i'\{L\} = \epsilon_0\frac{L}{d}$$

$$C'\{L\} = \frac{q'}{V_0} \overset{k)}{=} \epsilon_0\frac{L}{d} + \frac{\epsilon_0}{2\pi}\ln\left\{\frac{2\pi L}{d}\right\}.$$

Somit erhält man im vorliegenden Fall die längenbezogene Streukapazität

$$C_s'\{L\} = C'\{L\} - C_i'\{L\} = \frac{\epsilon_0}{2\pi}\ln\left\{\frac{2\pi L}{d}\right\}.$$

Die Abschätzung der Streukapazität eines Kondensators mit Plattenausdehnung $a \gg d$ und $b \gg d$ erfolgt mit obigem Ansatz nach

$$C_s \approx 2\left(aC_s'\left\{\frac{b}{2}\right\} + bC_s'\left\{\frac{a}{2}\right\}\right).$$

Das heißt, der Kondensator wird in je zwei Kapazitäten der Breite $L = \frac{a}{2}$ bzw. $L = \frac{b}{2}$ mit Tiefe b bzw. a aufgeteilt.

Aufgabe 3

a)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{10 \cdot 10^{10} \, \frac{1}{\mathrm{s}}} = 3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

b)

c) *Häufiger Fehler: Für das Quellfeld wird $E(x, y, z)$ statt $E(x_0, y_0, z_0)$ eingesetzt. Damit wird die weitere Rechnung nicht nur sinnlos, sondern auch einfacher, weswegen kaum noch Punkte gegeben werden können!*

$$\begin{aligned} E_x(x,y,z) &= \frac{1}{i\lambda(z-z_0)} \exp\{ik(z-z_0)\} \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_x(x_0,y_0,z_0) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda(z-z_0)}\left[[x_0-x]^2 + [y_0-y]^2\right]\right\} dx_0\,dy_0 \\ E_x(x,y,L) &= \frac{1}{i\lambda L}\exp\{ikL\} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E_0 \exp\left\{-\frac{x_0^2}{r_1^2} + i\delta_1 x_0^2\right\} \exp\left\{-\frac{y_0^2}{r_1^2} + i\delta_1 y_0^2\right\} \cdot \\ &\quad \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda L}\left[[x_0-x]^2 + [y_0-y]^2\right]\right\} dx_0\,dy_0 \end{aligned}$$

(Die Angabe der 2. Gleichung genügt)

d)
$$\begin{aligned}
E_x(x,y,L) &= \frac{1}{i\lambda L}\exp\{ikL\}E_0 \\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{x_0^2\left[-\frac{1}{r_1^2}+i\delta_1+\frac{i\pi}{\lambda L}\right] - x_0\frac{i2\pi x}{\lambda L} + \frac{i\pi x^2}{\lambda L}\right\} dx_0 \\
&\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{y_0^2\left[-\frac{1}{r_1^2}+i\delta_1+\frac{i\pi}{\lambda L}\right] - y_0\frac{i2\pi y}{\lambda L} + \frac{i\pi y^2}{\lambda L}\right\} dy_0
\end{aligned}$$

e) Die Parameter lauten unter Beachtung der Vorzeichen für das Integral über x_0: bzw. y_0:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{1}{r_1^2} - i\delta_1 - \frac{i\pi}{\lambda L} & \alpha^2 &= \frac{1}{r_1^2} - i\delta_1 - \frac{i\pi}{\lambda L} \\
\beta &= \frac{i2\pi x}{\lambda L} & \beta &= \frac{i2\pi y}{\lambda L} \\
\gamma &= -\frac{i\pi x^2}{\lambda L} & \gamma &= -\frac{i\pi y^2}{\lambda L}
\end{aligned}$$

(In das Integral für x einsetzen, aus Analogie auf y schließen)

$$\begin{aligned}
E_x(x,y,L) &= \frac{1}{i\lambda L}\exp\{ikL\}E_0\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}}}\exp\left\{\frac{-\frac{4\pi^2x^2}{\lambda^2L^2}}{4\left[\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}\right]}+\frac{i\pi x^2}{\lambda L}\right\} \\
&\quad\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}}}\exp\left\{\frac{-\frac{4\pi^2y^2}{\lambda^2L^2}}{4\left[\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}\right]}+\frac{i\pi y^2}{\lambda L}\right\} \\
&= \frac{1}{i\lambda L}\exp\{ikL\}\frac{E_0\pi}{\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}}\exp\left\{\frac{-\frac{\pi^2r^2}{\lambda^2L^2}}{\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}}+\frac{i\pi r^2}{\lambda L}\right\}
\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{\pi^2r^2}{\lambda^2L^2}}{\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}}+\frac{i\pi r^2}{\lambda L} &= \frac{-\frac{\pi^2r^2}{\lambda^2L^2}\left[\frac{1}{r_1^2}+i\delta_1+\frac{i\pi}{\lambda L}\right]}{\left[\frac{1}{r_1^2}-i\delta_1-\frac{i\pi}{\lambda L}\right]\left[\frac{1}{r_1^2}+i\delta_1+\frac{i\pi}{\lambda L}\right]}+\frac{i\pi r^2}{\lambda L} \\
&= \frac{-\frac{\pi^2r^2}{r_1^2\lambda^2L^2}-i\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]\frac{\pi^2r^2}{\lambda^2L^2}}{\frac{1}{r_1^4}+\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]^2}+\frac{i\pi r^2}{\lambda L}
\end{aligned}$$

$$\Re = -\frac{\frac{\pi^2r^2}{r_1^2\lambda^2L^2}}{\frac{1}{r_1^4}+\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]^2} \qquad \Im = -\frac{\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]\frac{\pi^2r^2}{\lambda^2L^2}}{\frac{1}{r_1^4}+\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]^2}+\frac{\pi r^2}{\lambda L}$$

g)

$$\Re \stackrel{!}{=} -r^2/r_2^2 \Longrightarrow r_2 = \sqrt{\frac{\frac{1}{r_1^4}+\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]^2}{\frac{\pi^2}{r_1^2\lambda^2 L^2}}}$$

$$\Im \stackrel{!}{=} \delta_2 r^2 \Longrightarrow \delta_2 = -\frac{\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]\frac{\pi^2}{\lambda^2 L^2}}{\frac{1}{r_1^4}+\left[\delta_1+\frac{\pi}{\lambda L}\right]^2}+\frac{\pi}{\lambda L}$$

h) r_2 wird minimal, wenn $\delta_1 = -\pi/(\lambda L)$ ist.
Wer dies nicht sieht, ableiten! Häufiger Fehler: $\delta_1 = 0$

i) Es ergibt sich $\delta_2 = \pi/(\lambda L) = -\delta_1$.

k)

$$r_1 \stackrel{!}{=} r_2 = \frac{\lambda L}{\pi r_1} \longrightarrow r_1 = \sqrt{\lambda L/\pi}$$

l)

$$|E_x(x,y,0)|^2 = E_0 \exp\left\{-\frac{2r^2}{r_1^2}\right\}$$

Häufig wird die Beziehung $|e^{x+iy}| = e^x$ *nicht erkannt!*
Integration des Zählers liefert mit der Substitution $r^2 = t$; $dt = 2r\,dr$:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} E_0^2 \exp\left\{-\frac{2r^2}{r_1^2}\right\} r\,d\varphi\,dr = \int_0^{R_0} E_0^2 \exp\left\{-\frac{2r^2}{r_1^2}\right\} 2\pi r\,dr$$

$$= \int_0^{R_0^2} E_0^2 \exp\left\{-\frac{2t}{r_1^2}\right\} \pi\,dt = \int_0^{R_0^2} E_0^2 \exp\left\{-\frac{2t}{r_1^2}\right\} \pi\,dt$$

$$= -\frac{\pi r_1^2 E_0^2}{2}\left[\exp\left\{-\frac{2t}{r_1^2}\right\}\right]_0^{R_0^2} = \frac{\pi r_1^2 E_0^2}{2}\left[1-\exp\left\{-\frac{2R_0^2}{r_1^2}\right\}\right]$$

Das Integral des Nenners entspricht dem des Zählers für $R_0 \to \infty$: $\pi r_1^2 E_0^2/2$
Damit:

$$1-\exp\left\{-\frac{2R_0^2}{r_1^2}\right\} = 98\% \Longrightarrow \exp\left\{-\frac{2R_0^2}{r_1^2}\right\} = 2\% = \exp\{-4\}$$

$$R_0 = \sqrt{2}r_1 = \sqrt{2\lambda L/\pi} = 1.4\,\mathrm{m}$$

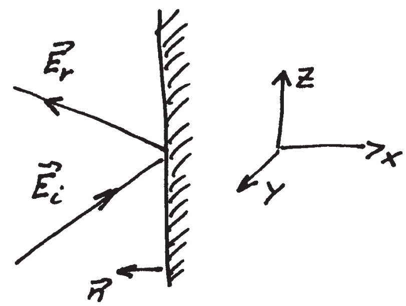
m)

$$R_0' = 8\,\mathrm{mm}$$

Aufgabe 4

a Grenzfläche liegt in der yz-Ebene an der Stelle $x=0$

Normalenvektor: $\underline{\vec{n} = -\vec{e}_x}$



b $\vec{E}_{tan} = \vec{E}_{i,tan} + \vec{E}_{r,tan} = 0$

$$(\vec{n} \times \vec{E}_i) \times \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{E}_r) \times \vec{n} = 0$$

$$(\vec{n} \times \vec{E}) \times \vec{n} = -\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = -[\vec{n} \cdot (\vec{E} \cdot \vec{n}) - \vec{E}] = \vec{E} - \vec{n}(\vec{E} \cdot \vec{n})$$

c Phasen der einfallenden und reflektierten Welle dürfen sich nur um $2\pi m$ unterscheiden.

$$(\vec{k}_i \vec{r} - \omega_i t)\big|_{x=0} = (\vec{k}_r \vec{r} - \omega t)\big|_{x=0} + 2\pi m$$

Für $\vec{r} = 0,\ t = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0$

$\vec{r} = 0,\ t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_i = \omega_r = \omega$ keine Frequenzänderung an der Grenzfläche

$\vec{r} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k}_i \vec{r}\big|_{x=0} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}\big|_{x=0}$

$\Rightarrow \quad \underline{\vec{n} \times (\vec{k}_r - \vec{k}_i) = 0}$ besitzt nur noch $\vec{n}$-Komponenten

d Differenz: $\vec{k}_r - \vec{k}_i = \Delta k\, \vec{e}_d \qquad \vec{e}_d = \vec{n} \quad ; \Delta k \neq 0$

$\Rightarrow \quad \vec{k}_r - \vec{k}_i = \Delta k\, \vec{n} \quad (*)$ beide Seiten mit $(\vec{k}_r + \vec{k}_i)$ multiplizieren!

$$(\vec{k}_r - \vec{k}_i) \cdot (\vec{k}_r + \vec{k}_i) = k_r^2 - \cancel{\vec{k}_r \vec{k}_i} + \cancel{\vec{k}_r \vec{k}_i} - k_i^2 = k_r^2 - k_i^2$$

$\Rightarrow \quad k_r^2 - k_i^2 = \Delta k\, \vec{n} \vec{k}_r + \Delta k\, \vec{n} \vec{k}_i$

mit Dispersionsrelation: $k_r^2 = k_i^2$

$\Rightarrow \quad 0 = \Delta k\, \vec{n} \vec{k}_r + \Delta k\, \vec{n} \vec{k}_i \qquad ; \Delta k \neq 0$

$\Rightarrow \quad \vec{n} \vec{k}_r = -\vec{n} \vec{k}_i$

e

$$\vec{k}_r - \vec{k}_i = \Delta k \vec{n} \quad | \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{k}_r \cdot \vec{n} - \vec{k}_i \vec{n} = \Delta k \underbrace{\vec{n}\vec{n}}_{=1}$$

$$\Rightarrow \quad -(\vec{n}\vec{k}_i) - \vec{k}_i \vec{n} = \Delta k \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\Delta k = -2\vec{k}_i \cdot \vec{n}}}$$

einsetzen in obige Gleichung (*) aus d)

$$\Rightarrow \quad \vec{k}_r - \vec{k}_i = -2(\vec{k}_i \vec{n})\vec{n}$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\vec{k}_r = \vec{k}_i - 2(\vec{k}_i \cdot \vec{n})\vec{n}}} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -2 \end{array}$$

f

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{k}_i)(\vec{E}_i \cdot \vec{n}) + (\vec{k}_i \times \vec{n})(\vec{E}_i \times \vec{n}) = 0$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{k}_r)(\vec{E}_r \cdot \vec{n}) + (\vec{k}_r \times \vec{n})(\vec{E}_r \times \vec{n}) = 0$$

mit: $\vec{n} \cdot \vec{k}_i = -\vec{n}\vec{k}_r$

$\vec{n} \times \vec{k}_i = \vec{n} \times \vec{k}_r$

$$\Rightarrow \qquad (\vec{n} \cdot \vec{k}_i)(\vec{E}_{i0} \cdot \vec{n}) + (\vec{k}_i \times \vec{n})(\vec{E}_{i0} \times \vec{n}) = 0$$

$$-(\vec{n}\vec{k}_i)(\vec{E}_{r0}\vec{n}) + (\vec{k}_i \times \vec{n})(\vec{E}_{r0} \times \vec{n}) = 0$$

$$\sum = (\vec{n}\vec{k}_i)\left[\vec{n}(\vec{E}_{i0} - \vec{E}_{r0})\right] + (\vec{n} \times \vec{k}_i)\left[(\vec{E}_{i0} + \vec{E}_{r0}) \times \vec{n}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (\vec{n} \cdot \vec{k}_i)\left[\vec{n} \cdot (\vec{E}_{i0} - \vec{E}_{r0})\right] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{n}(\vec{E}_{i0} - \vec{E}_{r0}) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{\underline{\vec{n}\vec{E}_{i0} = \vec{n}\vec{E}_{r0}}}$$

g aus a) $(\vec{n} \times \vec{E}) \times \vec{n} = 0$

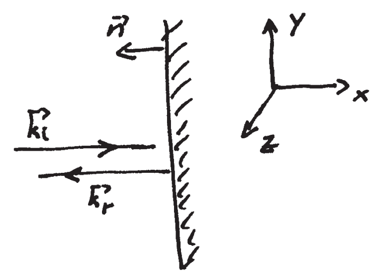
$\hookrightarrow \quad \vec{E} - \vec{n}(\vec{E}\vec{n}) = 0 \qquad \text{mit} \quad \vec{E} = \vec{E}_{i0} + \vec{E}_{r0}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_{i0} + \vec{E}_{r0} = \vec{n}\left[(\vec{E}_{i0} + \vec{E}_{r0})\vec{n}\right]$$

$$= \vec{n}\left[\vec{E}_{i0}\cdot\vec{n} + \underbrace{\vec{E}_{r0}\cdot\vec{n}}_{\vec{E}_{i0}\cdot\vec{n}}\right] = \vec{n}\left[2\vec{E}_{i0}\cdot\vec{n}\right] = 2\vec{n}(\vec{E}_{i0}\cdot\vec{n})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{E}_{r0} = -\vec{E}_{i0} + 2\vec{n}(\vec{E}_{i0}\vec{n})} \qquad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 2 \end{array}$$

h <u>Skizze</u>:



$\vec{k}_i = k_i \cdot \vec{e}_x \qquad \Rightarrow \quad \vec{k}_r = \vec{k}_i - 2(\vec{n}\cdot\vec{k}_i)\vec{n} = -k_i\vec{e}_x$

$\vec{n} = -\vec{e}_x$

$\vec{E}_{i0} = E_{i0}\,\vec{e}_y \qquad \Rightarrow \quad \vec{E}_{r0} = 2(-\vec{e}_x)(E_{i0}\cdot\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x) - E_{i0}\vec{e}_y = -E_{i0}\vec{e}_y$

i gesamte $\vec{E}$-Feld: $\vec{E} = E_{i0}\, e^{+i\omega t}\left[e^{ik_i x} - e^{-ik_i x}\right]\vec{e}_y \qquad k_i = k_r = k.$

$$\mathrm{Re}\{\vec{E}\} = 2E_{i0}\,\vec{e}_y \cdot \sin\{kx\}\sin\{\omega t\} = 2\vec{E}_{i0}\sin\{kx\}\sin\{\omega t\}$$

k $\vec{H}_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(\vec{e}_x \times \vec{E}_i) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{i0}\, e^{i(k_i x - \omega t)}\cdot\vec{e}_z$

$\vec{H}_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}(-\vec{e}_x \times \vec{E}_r) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{i0}\, e^{-i(k_i x + \omega t)}\cdot\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \quad \vec{H} = \vec{H}_i + \vec{H}_r = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_{i0}\,\vec{e}_z\cos\{k_i x\}\, e^{-i\omega t}$$

l Energiedichten

$$w = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_0 \left(Re\{\vec{E}\}\right)^2 + \mu_0 \left(Re\{\vec{H}\}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4\varepsilon_0 E_{i0}^2 \sin^2\{kx\}\sin^2\{\omega t\} + 4\mu_0 \frac{\varepsilon_0}{\mu_0} E_{i0}^2 \cos^2\{kx\}\cos^2\{\omega t\}\right]$$

$$= 2\varepsilon_0 E_{i0}^2 \left[\sin^2\{kx\}\sin^2\{\omega t\} + \cos^2\{kx\}\cos^2\{\omega t\}\right]$$

$$= \varepsilon_0 E_{i0}^2 \left[1 + \cos\{2kx\}\cos\{2\omega t\}\right]$$

Zeitmittelung: $\overline{\cos\{2\omega t\}} = 0$

$\Rightarrow \quad \overline{w} = \varepsilon_0 E_{i0}^2 \quad$ Energiedichte

m Poyntingvektor: $\vec{S} = \frac{1}{2} Re\{\vec{E}\} \times Re\{\vec{H}\}$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, E_{i0}^2 \sin\{2kx\}\sin\{2\omega t\} \cdot \vec{e}_x$$

Zeitmittelung: $\overline{\vec{S}} = 0$, da $\overline{\sin\{2\omega t\}} = 0$

$\Rightarrow$ kein Energietransport $\Rightarrow$ stehende Welle