Aufgabe 1

Das Potential der Punktladung im Ursprung auf der gegebenen Geraden lautet

$$\begin{aligned} V\left(\vec{r}\left(t\right)\right) &\overset{(4.20)}{=} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \left|t\vec{e_x} + \left(a-t\right)\vec{e_y}\right|} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{t^2 + \left(a-t\right)^2}} \,. \end{aligned}$$

Die dielektrische Verschiebung auf der Geraden ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \vec{D}\left(\vec{r}\left(t\right)\right) &= \epsilon_0 \vec{E}\left(\vec{r}\left(t\right)\right) \\ &\overset{(1.24)}{=} \epsilon_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi} \frac{t\vec{e_x} + \left(a-t\right)\vec{e_y}}{\left(t^2 + \left(a-t\right)^2\right)^{3/2}} \,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die gesuchte Raumladung kann z.B. mit der Poissongleichung

$$\rho\left(\vec{r}\right) \overset{(4.102)}{=} -\epsilon_0 \triangle V\left(\vec{r}\right)$$

besimmt werden.
Das gegebene Potential in Kugelkoordinaten hängt nur von der Radialkoordinate r ab:

$$\begin{aligned} V\left(r,\varphi,\theta\right) &= V\left(r\right) \\ \triangle V &\overset{(A.3)}{=} \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}V + \frac{\partial^2}{\partial r^2}V \,. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}V &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \exp\left\{-r/r_0\right\} \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \exp\left\{-r/r_0\right\} \end{aligned}$$

ergibt sich die gesuchte Raumladung zu

$$\rho\left(r\right) = \frac{Q}{4\pi r_0^2}\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \exp\left\{-r/r_0\right\} \,.$$

Aufgabe 3

Das Biot-Savart Gesetz erlaubt die Berechnung des Magnetfeldes $\vec{H}$ der Stromdichteverteilung $\vec{j_V}$:

$$\vec{H}\left(\vec{r}\right) \overset{(2.3)}{=} \iiint\limits_V \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{j_V}\left(\vec{r}\,'\right) \times \left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \mathrm{d}^3 r' \,.$$

Der Übergang zum Stromfaden erfolgt durch die Ersetzung $\vec{j_V} \mathrm{d}^3 r' \Rightarrow I \mathrm{d}\vec{l}\,'$

$$\vec{H}\left(\vec{r}\right) = \frac{-I}{4\pi} \int\limits_C \frac{\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) \times \mathrm{d}\vec{l}\,'}{\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3} \,.$$

Mit

$$\vec{r}\,' = a \cos\{\varphi\}\, \vec{e_x} + b \sin\{\varphi\}\, \vec{e_y}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{l}\,' &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(a \cos\{\varphi\}\, \vec{e_x} + b \sin\{\varphi\}\, \vec{e_y}\right) \mathrm{d}\varphi \\
&= \left[-a \sin\{\varphi\}\, \vec{e_x} + b \cos\{\varphi\}\, \vec{e_y}\right] \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

berechnet sich auf der z-Achse ($\vec{r} = z\vec{e_z}$) der Zähler im obigen Integral zu

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right) \times \mathrm{d}\vec{l}\,' &= \left[z\vec{e_z} - a \cos\{\varphi\}\, \vec{e_x} - b \sin\{\varphi\}\, \vec{e_y}\right] \times \\
&\quad \times \left[-a \sin\{\varphi\}\, \vec{e_x} + b \cos\{\varphi\}\, \vec{e_y}\right] \mathrm{d}\varphi \\
&= \Big[a \sin\{\varphi\}\, z \left(\vec{e_x} \times \vec{e_z}\right) - ab \sin^2\{\varphi\} \left(\vec{e_x} \times \vec{e_y}\right) - \\
&\quad - b \cos\{\varphi\}\, z \left(\vec{e_y} \times \vec{e_z}\right) + ab \cos^2\{\varphi\} \left(\vec{e_y} \times \vec{e_x}\right)\Big] \mathrm{d}\varphi \\
&= \left[-a \sin\{\varphi\}\, z\vec{e_y} - ab\vec{e_z} - b \cos\{\varphi\}\, z\vec{e_x}\right] \mathrm{d}\varphi
\end{aligned}$$

und der Nenner zu

$$\begin{aligned}
\left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|^3 &= \left|z\vec{e_z} - a \cos\{\varphi\}\, \vec{e_x} - b \sin\{\varphi\}\, \vec{e_y}\right|^3 \\
&= \left(a^2 \cos^2\{\varphi\} + b^2 \sin^2\{\varphi\} + z^2\right)^{3/2} \,.
\end{aligned}$$

Somit erhält man für das Magnetfeld auf der z-Achse

$$\begin{aligned}
\vec{H}\left(\vec{r} = z\vec{e_z}\right) &= \frac{I}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{b \cos\{\varphi\}\, z\vec{e_x} + a \sin\{\varphi\}\, z\vec{e_y} + ab\vec{e_z}}{\left(a^2 \cos^2\{\varphi\} + b^2 \sin^2\{\varphi\} + z^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{I}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{ab\vec{e_z}}{\left(a^2 \cos^2\{\varphi\} + b^2 \sin^2\{\varphi\} + z^2\right)^{3/2}} \mathrm{d}\varphi \,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die gesuchte Stromdichteverteilung berechnet man mit dem Durchflutungsgesetz

$$\vec{j_V}\left(\vec{r}\right) \overset{(2.26)}{=} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}\left(\vec{r}\right) .$$

Die in Zylinderkoordinaten gegebene magnetische Induktion hängt nur von der Radialkoordinate ρ ab und besitzt nur in z-Richtung eine Komponente:

$$\begin{aligned} \vec{B}\left(\rho, \Phi, z\right) &= B_z\left(\rho\right) \vec{e_z} \\ \nabla \times \vec{B}\left(\vec{r}\right) &\overset{(A.2)}{=} -\frac{\partial}{\partial \rho} B_z \vec{e_\Phi} \end{aligned}$$

Die gesuchte Stromdichteverteilung lautet somit

$$\vec{j_V}\left(\vec{r}\right) = 2 \frac{\rho}{\mu_0 r_0^2} B_0 \exp\left\{ -\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^2 \right\} \vec{e_\Phi} .$$

Aufgabe 5

Für die Kraft auf das Leiterleiterstück gilt

$$\vec{F} \overset{(2.33)}{=} \int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} \int_{-l}^{0} \vec{j_V} \times \vec{B} \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \, .$$

Da der zu integrierende Term bzgl. seiner y-Abhängigkeit punktsymmetrisch im Ursprung ist

$$\left(\vec{j_V} \times \vec{B}\right)\Big|_{x,y,z} = -\left(\vec{j_V} \times \vec{B}\right)\Big|_{x,-y,z}$$

erhält man

$$\vec{F} = 0 \, .$$

Aufgabe 6

Die Gesamtfläche beträgt:

$$A = 3 \cdot [L \cdot a] + \left[\frac{1}{2} a \cdot \sqrt{a^2 - (a/2)^2}\right] = 3La + \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

Da die Randeffekte nach Angabe zu vernachlässigen sind, gilt:

$$|\vec{j}| = \frac{J}{A} = \frac{J}{3La + \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}}$$

Die Stromdichten lauten:

$$\vec{j}_0 = \pm|\vec{j}|\vec{e}_z$$

$$\vec{j}_1 = \pm|\vec{j}|\vec{e}_y$$

$$\vec{j}_2 = \mp|\vec{j}|\left[\cos\{\pi/3\}\vec{e}_y + \sin\{\pi/3\}\vec{e}_x\right]$$

$$\vec{j}_3 = \mp|\vec{j}|\left[\cos\{-\pi/3\}\vec{e}_y + \sin\{-\pi/3\}\vec{e}_x\right]$$

Aufgabe 7

Verwendete Gleichungen:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \qquad \text{und} \qquad \vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s$$

Die Oberflächenladungsdichte ρ_s beinhaltet nur die freien Raumladungen, deshalb gilt:

$$D_{2,x} - D_{1,x} = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0(E_{2,x} - E_{1,x}) + (P_{2,x} - P_{1,x}) = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0(E_{2,x} - E_{1,x}) = P_0$$

Da außerdem immer noch $\oint \vec{E}\,d\vec{s}$ gültig ist (Energieerhaltung), bleiben die Stetigkeitsbedingungen für die Tangentialkomponenten erhalten:

$$E_{2,y} = E_{1,y} \qquad \text{sowie} \qquad E_{2,z} = E_{1,z}$$

Aufgabe 8

Verwendete Gleichungen: 4.33 + Lösung aus Übung 4.9.3.

$$w(\vec{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}(\vec{r})|^2$$

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{r_L}{r_0}\cdot\frac{z - r_0^2/z_L^*}{z - z_L}\right|$$

Die Linienladung soll im Abstand $|z_L| = a$ liegen, wir wählen für $z_L = a + i0$ (da dann keine konjugiert komplexen Größen mehr vorhanden sind):

$$V = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{a}{r_0}\cdot\frac{z - r_0^2/a}{z - a}\right\} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[2\cdot\ln\left\{\frac{a}{r_0}\right\} + \ln\left\{\frac{(x - r_0^2/a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2}\right\}\right]$$

Benötigt wird die elektrische Feldstärke in der Ebene $y = 0$. Es verschwinden sowohl der erste ln-Term, als auch die Feldstärke in y-Richtung (Begründung: Symmetrie oder nur quadratisches Auftreten von y):

$$\begin{aligned}\vec{E}|_{y=0} &= -\frac{\partial}{\partial x}V\cdot\vec{e}_x = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2(x-r_0^2/a)}{(x-r_0^2/a)^2+y^2}-\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+y^2}\right]\cdot\vec{e}_x\\ &= -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x-r_0^2/a}-\frac{1}{x-a}\right]\cdot\vec{e}_x = -\frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r_0^2/a-a}{[x-r_0^2/a][x-a]}\right]\cdot\vec{e}_x\end{aligned}$$

Die elektrische Energiedichte lautet somit:

$$w(\vec{r}) = \frac{\rho_L^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{[r_0^2/a-a]^2}{[x-r_0^2/a]^2[x-a]^2}$$

Aufgabe 9

In der u-Ebene lautet das Potential für den <u>konzentrischen</u> Fall:

$$V_{kmplx} = Aw + B$$

Äquipotentiallinien der z-Ebene sind durch $r=$ konstant gegeben, diese bilden sich in der w-Ebene auf $u=$ konstant ab. Mit den Randbedingungen

$$V|_{z=R_1} = 0 \quad \text{und} \quad V|_{z=R_2} = U$$

lautet das Potential

$$V_{\text{kmplx}} = U\cdot\frac{w-\mathrm{Ln}\{R_1\}}{\mathrm{Ln}\{R_2\}-\mathrm{Ln}\{R_1\}}$$

das reelle Potential in der w-Ebene entspricht dem Realteil des komplexen Potentiales (Originalproblem). Wegen $\Re\{w\} = u = \ln\{r\}$ lautet das reele Potential in der z-Ebene:

$$V_{\text{reell}} = U\cdot\frac{\mathrm{Ln}\{r/R_1\}}{\mathrm{Ln}\{R_2/R_1\}}$$

Für den exzentrischen Fall wird das Problem wieder auf den gleichen Plattenkondensator abgebildet:

$$V_{kmplx} = Aw + B$$

Die Randbedingungen in der z-Ebene können zu

$$V|_{z=z_1+R_1} = 0 \quad \text{und} \quad V|_{z=z_2+R_2} = U$$

formuliert werden, was auf

$$V_{\text{kmplx}} = U\cdot\frac{w-\mathrm{Ln}\left\{\frac{z_1+R_1+a}{z_1+R_1-a}\right\}}{\mathrm{Ln}\left\{\frac{z_2+R_2+a}{z_2+R_2-a}\right\}-\mathrm{Ln}\left\{\frac{z_1+R_1+a}{z_1+R_1-a}\right\}}$$

führt. Da es sich hier ebenfalls um ein Originalproblem handelt (gleiche Plattenanordnung!), lautet das Potential in der z-Ebene:

$$V_{\text{kmplx}} = U \cdot \frac{\operatorname{Ln}\left\{\frac{z+a}{z-a}\right\} - \operatorname{Ln}\left\{\frac{z_1+R_1+a}{z_1+R_1-a}\right\}}{\operatorname{Ln}\left\{\frac{z_2+R_2+a}{z_2+R_2-a}\right\} - \operatorname{Ln}\left\{\frac{z_1+R_1+a}{z_1+R_1-a}\right\}}$$

Es kann noch weiter vereinfacht werden, ist aber nicht nötig:
Es ist $(z_1 + R_1 + a)/(z_1 + R_1 - a) = r_1$, *analog für* r_2, *damit*

$$V_{\text{reell}} = U \cdot \frac{\ln\left|\frac{z+a}{z-a}\right| - \ln\{r_1\}}{\ln\left\{\frac{r_2}{r_1}\right\}}$$

Aufgabe 10

Verwendete Gleichungen: Feld einer kreisförmigen Stromschleife (Script'98 Gl. 2.11), Zusammenhänge zwischen Magnetisierung, Flußdichte und Feldstärke (5.68–5.70)

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0}\vec{B} = \mu - 1 \frac{j_0 r^2}{2[z^2 + r^2]^{3/2}}$$

Aufgabe 11

Es gilt

$$\vec{M} = \nabla\Phi_{\text{m}}.$$

Wegen $M_0 \circ \vec{r} = xM_{rm0x} + yM_{rm0y} + zM_{rm0z}$ resultieren zunächst $\nabla M_0 \circ \vec{r} = \vec{M}_0$ und $\nabla r^{-3} = -3r^{-5}\vec{r}$. Anhand der Kettenregel folgt die Lösung

$$\vec{M} = k\left(r^{-3}\vec{M}_0 - 3r^{-5}(\vec{M}_0 \circ \vec{r})\vec{r}\right) \quad .$$

Aufgabe 12

Die Polarisationsstromdichte folgt aus $\vec{j_{\text{pol}}} = \frac{\text{d}}{\text{d}t}\vec{P}$. Damit ergibt sich wegen $\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}$ $\vec{j_{\text{pol}}} = \omega\epsilon_0(\epsilon - 1)\vec{E}_0\cos\{\omega t\}$.

Aufgabe 13

Aus der Dispersionsrelation $\|\vec{k}\|^2 = k^2 = k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2$ folgt wegen $k_\mathrm{x}^2 = 0$ für $k_\mathrm{z}^2 = k^2 - k_\mathrm{y}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(m\pi\frac{1}{b}\right)^2$ und damit aus $c_\mathrm{gr}c_\mathrm{ph} = c_\mathrm{gr}\frac{\omega}{k_\mathrm{z}} = c^2$ für $c_\mathrm{gr} = \frac{c^2}{\omega}\sqrt{k^2 - k_\mathrm{y}^2}$, also

$$c_\mathrm{gr} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m\pi}{kb}\right)^2} \quad .$$

Aufgabe 14

Alle Komponenten sind nur in Exponentialschreibweise und nach x und y sortierte Funktionen. Die Wurzelbeziehung für k_z fehlt. Daraus resultiert, daß hier wenigstens die Näherung $k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 \ll k^2$ verwendet wurde. An dem Faktor $\exp\left\{i\pi\frac{x_0^2+y_0^2}{\lambda z}\right\}$ ist erkennbar, daß es sich hier um eine Fresnel- oder Huygens- Näherung handelt, er fehlt in der Fraunhofernäherung. Da der Vorfaktor die reziproke Wellenlänge enthält, und bis auf den Faktor $\exp\{ikz\}$ richtig ist, wurde hier die Fresneldarstellung mit obiger Näherung gewählt. Als Zusatzbedingung muß noch $kz \ll 1$ gelten, was nur für Quellnahe Punkte richtig ist.