Aufgabe 1

Das Potential einer Punktladungen Q_1 am Ort $\vec{r}_1$ lautet

$$V\{\vec{r}\} \quad = \quad \frac{Q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \left|\vec{r} - \vec{r}_1\right|}.$$

Hier soll das Potential einer gegebenen Raumladung ρ_v berechnet werden. Die Raumladung setzt sich aus der Punktladung $Q_1 = +Q$ am Ort $\vec{r}_1 = +\frac{d}{2}\vec{e_\mathrm{x}}$ und der Punktladung $Q_2 = -Q$ am Ort $\vec{r}_2 = -\frac{d}{2}\vec{e_\mathrm{x}}$ zusammen. Unter Berücksichtigung des Superpositionsprinzips ergibt sich das gesuchte Potential zu

$$V\{\vec{r}\} \quad = \quad \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{1}{\left|\vec{r} - \frac{d}{2}\vec{e_\mathrm{x}}\right|} - \frac{1}{\left|\vec{r} + \frac{d}{2}\vec{e_\mathrm{x}}\right|}\right).$$

Aufgabe 2

Es soll die Verteilung der durch die Stromverteilung $\vec{j}$ erzeugten freien Raumladungen berechnet werden. Ausgangspunkt ist die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \circ \vec{j} \quad = \quad -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

welche den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Ladungsdichte beschreibt.
Da die Stromdichte hier nur eine x-Komponente besitzt, gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(j_0 \sin\left\{\omega t - \frac{r}{r_0}\right\}\right) \\
&= -\frac{\partial}{\partial x}\left(j_0 \sin\left\{\omega t - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{r_0}\right\}\right) \\
&= -\frac{j_0 x}{r r_0}\cos\left\{\omega t - \frac{r}{r_0}\right\}.
\end{aligned}$$

Die gesuchte Verteilung der freien Raumladungen ergibt sich somit zu

$$\rho\{t\} \quad = \quad \rho\left\{t = \frac{r}{\omega r_0}\right\} - \frac{j_0 x}{\omega r r_0}\sin\left\{\omega t - \frac{r}{r_0}\right\}.$$

Aufgabe 3

Das magnetische Vektorpotential eines geschlossenen Stromfadens mit Stromstärke I lautet

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}.$$

Wegen der betrachteten elliptischen Stromschleife gilt

$$\begin{aligned} \vec{r}\,' &= (a\cos\{\varphi\}\,\vec{e_\mathrm{x}} + b\sin\{\varphi\}\,\vec{e_\mathrm{y}}) \\ d\vec{r}\,' &= (-a\sin\{\varphi\}\,\vec{e_\mathrm{x}} + b\cos\{\varphi\}\,\vec{e_\mathrm{y}})\,d\varphi. \end{aligned}$$

Das gesuchte magnetische Vektorpotential ist also

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin\{\varphi\}\,\vec{e_\mathrm{x}} + b\cos\{\varphi\}\,\vec{e_\mathrm{y}}}{\sqrt{(x - a\cos\{\varphi\})^2 + (y - b\sin\{\varphi\})^2 + z^2}}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Aufgabe 4

Das Ampèrsche Gesetz in Integralform lautet

$$\oint_C \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_{S_\mathrm{C}} \left(\nabla \times \vec{B}\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = \mu_0 \iint_{S_\mathrm{C}} \vec{j}_\mathrm{v} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = \mu_0 J_\mathrm{C}.$$

Der gesuchte Anteil J_C des felderzeugenden Stroms, der durch die gegebene Fläche fließt, läßt sich entweder mit Hilfe des geschlossenen Kurvenintegrals oder mit Hilfe des Flächenintegrals berechen. Beide Lösungswege sollen hier vorgestellt werden.

1. Lösungsweg: Kurvenintegral

Entsprechend den Kanten des Rechtecks wird der Integrationsweg in vier Bereiche unterteilt

$$\oint_\mathrm{C} \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_{\mathrm{C}_1} \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell_1} + \int_{\mathrm{C}_2} \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell_2} + \int_{\mathrm{C}_3} \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell_3} + \int_{\mathrm{C}_4} \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell_4}.$$

Die Parameterdarstellung der vier Wegabschnitte ist wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_1: &\quad \begin{pmatrix} \vec{\ell}_1\{t\} = t\vec{e_\mathrm{x}} + \frac{b}{2}\vec{e_\mathrm{y}} \\ \mathrm{d}\vec{\ell}_1 = \vec{e_\mathrm{x}}\mathrm{d}t \end{pmatrix}; \quad t \in \left[\frac{a}{2}, \frac{3a}{2}\right] \\
\mathrm{C}_2: &\quad \begin{pmatrix} \vec{\ell}_2\{t\} = \frac{3a}{2}\vec{e_\mathrm{x}} + t\vec{e_\mathrm{y}} \\ \mathrm{d}\vec{\ell}_2 = \vec{e_\mathrm{y}}\mathrm{d}t \end{pmatrix}; \quad t \in \left[\frac{b}{2}, \frac{3b}{2}\right] \\
\mathrm{C}_3: &\quad \begin{pmatrix} \vec{\ell}_3\{t\} = t\vec{e_\mathrm{x}} + \frac{3b}{2}\vec{e_\mathrm{y}} \\ \mathrm{d}\vec{\ell}_3 = \vec{e_\mathrm{x}}\mathrm{d}t \end{pmatrix}; \quad t \in \left[\frac{3a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\
\mathrm{C}_4: &\quad \begin{pmatrix} \vec{\ell}_4\{t\} = \frac{a}{2}\vec{e_\mathrm{x}} + t\vec{e_\mathrm{y}} \\ \mathrm{d}\vec{\ell}_4 = \vec{e_\mathrm{y}}\mathrm{d}t \end{pmatrix}; \quad t \in \left[\frac{3b}{2}, \frac{b}{2}\right].
\end{aligned}$$

Da die magnetische Induktion nur eine Azimutalkomponente besitzt, gilt

$$\begin{aligned}
\vec{B} \circ \vec{e_\mathrm{x}} &= -\sin\{\phi\}\, B_0 \\
&= -\frac{B_0 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
\vec{B} \circ \vec{e_\mathrm{y}} &= \cos\{\phi\}\, B_0 \\
&= \frac{B_0 x}{\sqrt{x^2+y^2}}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich der gesuchte Strom zu

$$\begin{aligned}
J_\mathrm{C} = \frac{B_0}{\mu_0}\Bigg(&- \int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{t^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{b}{2}}^{\frac{3b}{2}} \frac{\frac{3a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&- \int\limits_{\frac{3a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{3b}{2}}{\sqrt{t^2 + \left(\frac{3b}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}t + \int\limits_{\frac{3b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + t^2}}\,\mathrm{d}t \Bigg).
\end{aligned}$$

2. Lösungsweg: Flächenintegral

Die betrachtete Fläche liegt ganz in der x-y-Ebene, weshalb die Flächennormale in z-Richtung zeigt

$$\mathrm{d}^2\vec{S} = \vec{e_\mathrm{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Da die magnetische Induktion nur eine Azimutalkomponente besitzt, gilt

$$\begin{aligned}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{S} &= \left(\frac{B_0}{r\tan\{\Theta\}}\vec{e_\mathrm{r}} - \vec{e}_\Theta\right) \circ \left(\vec{e_\mathrm{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \frac{B_0}{r}\left(\frac{\cos\{\Theta\}}{\tan\{\Theta\}} + \sin\{\Theta\}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

In der x-y-Ebene ist $\cos\{\Theta\} = 0$, $\sin\{\Theta\} = 1$ und $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Der gesuchte Strom ergibt sich somit zu

$$J_\mathrm{C} = \frac{B_0}{\mu_0}\int\limits_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}}\int\limits_{\frac{b}{2}}^{\frac{3b}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 5

Die Energiedichte ist definiert als

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2.$$

Das elektrische Feld läßt sich aus dem Potential berechnen, die Azimuthal- und Polarkomponente verschwinden hierbei, da das Potential nur eine Radialabhängigkeit aufweist.

$$\vec{E} = -\nabla V = \frac{\partial}{\partial r}V\vec{e_\mathrm{r}} + \cdots = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\exp\left\{-\frac{r}{r_0}\right\}\cdot\left[-\frac{1}{r_0}\right]\vec{e_\mathrm{r}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}\exp\left\{-\frac{r}{r_0}\right\}\vec{e_\mathrm{r}}$$

Die Energiedichte ist also

$$w = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r_0^4}\exp\left\{-\frac{2r}{r_0}\right\}$$

Aufgabe 6

Die Polarisation ist

$$\vec{P} = [\varepsilon - 1]\varepsilon_0\vec{E}$$

Das elektrische Feld einer Linienladung im Vakuum entlang der z-Achse ist im Skript gegeben, Anpassung des Koordinatensystems liefert

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0(y^2+z^2)}\begin{pmatrix}0\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

Beim Übergang vom Vakuum auf ein Medium ist das Ergebnis durch die relative Dielektrizitätskonstante ε zu dividieren. Begründung liefert das Gaußsche Gesetz für die dielektrische Verschiebung. Das Oberflächenintegral über $\vec{D}\,\mathrm{d}^2\vec{S}$ ist gleich der eingeschlossenen Ladung. Da sich die Ladung nicht ändert, darf sich auch die Verschiebungsdichte nicht ändern. Damit aber muss das elektrische Feld invers proportional zu ε sein. Die Polarisation ist schließlich

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\rho_l}{2\pi(y^2 + z^2)} \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

Allgemeiner Ansatz:

$$V = X\{x\}Y\{y\}Z\{z\}$$

Das Problem ist nicht von x abhängig, deshalb:

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad X\{x\} \stackrel{!}{=} 1$$

Das Potential auf der Elektrode stellt bereits eine Eigenfunktion dar, die zudem die Randbedingungen erfüllt, daß das Potential bei $y = \pm b$ verschwindet, deshalb:

$$Y\{y\} \stackrel{!}{=} V_0 \cos\left\{\frac{\pi}{2b} y\right\}, \quad \frac{1}{Y^2}\frac{\partial}{\partial y} Y = -\frac{\pi^2}{4b^2}$$

Für die z-Abhängigkeit muß damit $Z\{z = c\} = 1$ erfüllt sein, andererseits darf das Potential für $z \to \infty$ nicht divergieren, deshalb

$$Z\{z\} = A\cosh\{\dots\} + B\sinh\{\dots\} = \exp\left\{-\frac{\pi}{2b}[z - c]\right\}$$

Das Ergebnis lautet

$$V = V_0 \cos\left\{\frac{\pi}{2b} y\right\} \exp\left\{-\frac{\pi}{2b}[z - c]\right\}$$

Aufgabe 8

Die zeitabhängige Greensche Funktion als Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G = -\delta^{(3)}\{\vec{r} - \vec{r'}\}\delta\{t - t'\} \tag{1}$$

lautet allgemein für jede Frequenzkomponente der Fourierzerlegung mit $c^2\|\vec{k}\|^2 = \omega$

$$G\{\vec{r}, \vec{r'}, t, t'\} = G\{\vec{r}, \vec{r'}\}\delta\left\{t' - \left(t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c}\right)\right\} \quad .$$

Dabei ist $G\{\vec{r}, \vec{r'}\}$ die Greensche Funktion des elektrostatischen Problems, hier also für die Kugel im freien Raum, Ursprung im Mittelpunkt der Kugel,

$$G\{\vec{r}, \vec{r'}\} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} - \frac{R}{r'}\frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2}\vec{r'}|}\right) \quad .$$

Für die zeitabhängige Greensche Funktion der Kugel im freien Raum resultiert somit

$$G\{\vec{r}, \vec{r'}\} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} - \frac{R}{r'}\frac{1}{|\vec{r} - \frac{R^2}{r'^2}\vec{r'}|}\right)\delta\left\{t' - \left(t \mp \frac{|\vec{r} - \vec{r'}|}{c}\right)\right\} \quad .$$

Aufgabe 9

Die Grundgleichung zur Berechnung des magnetischen Dipolmomentes lautet

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int\int\int \vec{r'} \times \vec{j}_\mathrm{v}\mathrm{d}^3r' \quad .$$

Die Angabe der Stromdichte zeigt, dass es sich um eine kreisförmige Stromschleife mit Radius in der x-y- Ebene und Mittelpunkt im Ursprung handelt. Daher gilt

$$\vec{r'} = \varrho'\vec{e_{\varrho'}} \quad .$$

Das Kreuzprodukt liefert

$$\vec{r'} \times \vec{j}_\mathrm{v} = I_0\delta\{z'\}\delta\{\varrho' - a\}\varrho'\sin\{2\Phi'\}\vec{e_\mathrm{z}} \quad .$$

Da die Richtung unabhängig von den gestrichenen Koordinaten ist, kann direkt integriert werden:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int\limits_{\varrho'=0}^{\infty}\int\limits_{z'=-\infty}^{\infty}\int\limits_{\Phi'=0}^{2\pi} \vec{r'} \times \vec{j}_\mathrm{v}\varrho\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}z'\mathrm{d}\Phi' = \frac{1}{2}\int\limits_{\Phi'=0}^{2\pi} I_0 a\sin\{2\Phi'\}\vec{e_\mathrm{z}}\mathrm{d}\Phi' = 0 \quad .$$

Aufgabe 10

Die Grundgleichung lautet

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \quad .$$

Weil $\vec{H}$ nur eine Komponente in θ- Richtung hat, lautet die Divergenz

$$\nabla \times \vec{H} = -\frac{1}{\sin\{\theta\}} \frac{\partial}{\partial \phi} (\vec{H} \circ \vec{e_\theta}) \vec{e_\mathrm{r}} + \frac{1}{r} (\vec{H} \circ \vec{e_\theta}) \vec{e_\phi} + \frac{\partial}{\partial r} (\vec{H} \circ \vec{e_\theta}) \vec{e_\phi} \quad .$$

Weil $\vec{H}$ weder von r noch von ϕ abhängt, resultiert für die Stromdichte

$$\vec{j} = (\vec{H} \circ \vec{e_\theta}) \vec{e_\phi} = \frac{H_0}{r} \sin\{\theta\} \vec{e_\phi} \quad .$$

Aufgabe 11

Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche lauten

$$\vec{n} \circ (\vec{D_2} - \vec{D_1}) = \varrho'_\mathrm{s}$$

und

$$\vec{n} \circ (\vec{j'_2} - \vec{j'_1}) = -\frac{\partial}{\partial t} \varrho'_\mathrm{s} \quad .$$

Über die Materialgleichungen resultiert

$$\vec{D} = \frac{\epsilon_0 \epsilon}{\sigma} \vec{j} \quad .$$

Mit den Ansätzen

$$\vec{j}' = \mathrm{Re}\{\vec{j_1}\} = \mathrm{Re}\left\{ j_1 \exp\{i\omega t\} \vec{e_\mathrm{x}} \right\}$$

und

$$\varrho'_\mathrm{s} = \mathrm{Re}\{\varrho_\mathrm{s}\} = \mathrm{Re}\left\{ \varrho_0 \exp\{i\omega t\} \right\}$$

resultieren

$$\vec{n} \circ \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2} \vec{j_2} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\sigma_1} \vec{j_1} \right) = \varrho_\mathrm{s}$$

und

$$\vec{n} \circ (\vec{j_2} - \vec{j_1}) = \frac{\partial}{\partial t} \varrho_\mathrm{s} = -i\omega \varrho_\mathrm{s} \quad .$$

Nach umformen ergibt sich

$$\vec{n} \circ \vec{j_2} = \vec{n} \circ \vec{j_1} - i\omega \varrho_\mathrm{s}$$

und damit

$$\vec{n} \circ \vec{j_1} \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\sigma_1} \right) - i\omega \varrho_\mathrm{s} \frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2} = \varrho_\mathrm{s} \quad .$$

Daraus resultiert

$$\varrho_\mathrm{s} = \frac{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\sigma_1}}{1 + i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2}} \vec{n} \circ \vec{j_1}$$

Unter Berücksichtigung von $\vec{n} \circ \vec{j_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} j_1 \exp\{i\omega t\}$ und mit $\psi = \arctan\{\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2}\}$ folgt

$$\varrho_\mathrm{s}' = j_1 \frac{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\sigma_1}}{\sqrt{2\left(1 + (\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\sigma_2})^2\right)}} \cos\{\omega t \ - \psi\} \quad .$$

Aufgabe 12

Es existieren zwei mögliche Lösungen, weil die Felder die Maxwellsche Gleichung

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

nicht erfüllen!

Ansatz 1:

$$\vec{j} \circ \vec{E} = \vec{E} \circ (\nabla \times \vec{H}) + \vec{E} \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad .$$

Wegen der ortsunabhängigkeit von $\vec{H}$ resultiert in dem linearen Medium

$$\vec{j} \circ \vec{E} = -E_0^2 \omega \epsilon \epsilon_0 \sin\{\omega t\} \cos\{\omega t\} \quad .$$

Ansatz 2:
Die Kontinuitätsgleichung für die Leistungsdichte lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} w + \nabla \circ \vec{S} = -\vec{j} \circ \vec{E} \quad .$$

Die Energiedichte w und der Pointingvektor $\vec{S}$ sind in linearen isotropen Medien mit

$$w = \frac{1}{2}\left(\epsilon\epsilon_0\|\vec{E}\| + \mu\mu_0\|\vec{H}\|\right) \quad .$$

und

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad .$$

definiert. Damit folgt

$$w = \frac{1}{2}\left(\epsilon\epsilon_0 E_0^2 \sin^2\{\omega t\} + \mu\mu_0\|H_0\|^2 \cos^2\{\omega t\}\right) = \epsilon\epsilon_0 E_0^2$$

und

$$\vec{S} = (E_0 H_{0\mathrm{y}} \vec{e_\mathrm{z}} - E_0 H_{0\mathrm{z}} \vec{e_\mathrm{y}}) \sin\{\omega t\} \cos\{\omega t\} \quad .$$

Wegen der ortsunabhängigkeit der Amplituden $E_0, H_{0\mathrm{y}}$ sowie $H_{0\mathrm{z}}$ und mit der zeitunabhängigkeit von w ergibt sich

$$\vec{j} \circ \vec{E} = 0 \quad .$$

Aufgabe 13

Die Lorentz- Eichung lautet

$$\nabla \circ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_\mathrm{el} = 0 \quad .$$

Die Divergenz des magnetischen Vektorpotentials ist hier

$$\nabla \circ \vec{A} = \frac{\sin\{\theta\}}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_0 \sin\{\omega t\}\frac{r_0}{r}\sin\{\theta\}\right) = A_0\frac{r_0}{r^2}\cot\{\theta\}\sin\{\omega t\} \quad .$$

Nach Zeitintegration resultiert also

$$\Phi_\mathrm{el} = A_0\frac{c^2 r_0}{\omega r^2}\cot\{\theta\}\cos\{\omega t\} \quad .$$

Aufgabe 14

Es gibt hier zwei Lösungswege, einen schnellen, bei dem die einzelnen Komponenten der $\vec{k}$ nicht berechnet werden und einen zweiten Weg, bei dem alle Teile einzeln bestimmt werden. Da die meisten Studenten den zweiten (umständlichen) Weg gegangen sind, wird er hier zusätzlich angegeben.

Weg 1:

Für den Reflektionsfaktor muss zunächst entschieden werden, ob es sich um eine TE- oder eine TM- oder eine gemischte Welle handelt. Dafür benutzt man für eine TE- Welle die Bedingung

$$\vec{n} \circ \vec{E} = 0 \quad ,$$

was hier zutrifft. Für eine TM- Welle gilt im übrigen

$$\vec{n} \circ \vec{H} = 0 \quad .$$

Für den Reflektionsfaktor müssen noch $\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{i}$ und $\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{t} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{i})^2}$ bestimmt werden. Hier resultiert $\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{i} = k_0 n_1 \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{t} = k_0 \sqrt{n_2^2 - \frac{2}{3} n_1^2}$. Daraus ergibt sich der Reflektionsfaktor in den unmagnetischen Medien

$$r = \frac{n_1 \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{n_2^2 - \frac{2}{3} n_1^2}}{n_1 \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{n_2^2 - \frac{2}{3} n_1^2}} \quad .$$

Weg 2:

Zunächst Bestimmung der Einheitsvektoren senkrecht und parallel zur Grenzfläche:

$$k_\mathrm{in} = \vec{k}_\mathrm{i} \circ \vec{n} = \sqrt{\frac{1}{3}} k_\mathrm{i} = k_0 \sqrt{\frac{1}{3}} n_1$$

$$\vec{k}_\mathrm{it} = \vec{k}_\mathrm{i} - k_\mathrm{in} \vec{n} = k_\mathrm{i} \frac{1}{3} (-\vec{e}_\mathrm{x} - \vec{e}_\mathrm{y} + 2\vec{e}_\mathrm{z})$$

$$k_\mathrm{it} = \|\vec{k}_\mathrm{it}\| = k_\mathrm{i} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\vec{e_{\mathrm{t}}} = \frac{\vec{k_{\mathrm{it}}}}{k_{\mathrm{it}}} = \sqrt{\frac{1}{6}}(-\vec{e_{\mathrm{x}}} - \vec{e_{\mathrm{y}}} + 2\vec{e_{\mathrm{z}}})$$

$$\vec{e_{\mathrm{l}}} = \vec{n} \circ \vec{e_{\mathrm{t}}} = \sqrt{\frac{1}{2}}(\vec{e_{\mathrm{x}}} - \vec{e_{\mathrm{y}}})$$

Da die Tangentialkomponenten der Ausbreitungsvektoren gleich sind (Snellius- Gesetz), folgt für die Normalkomponente von $\vec{k_{\mathrm{t}}}$

$$\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{t}}} = \sqrt{k_2^2 - k_{\mathrm{i}}^2 \frac{2}{3}} = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \frac{2}{3}}$$

Wegen

$$\vec{e_{\mathrm{t}}} \times \vec{E} = 0$$

und

$$\vec{e_{\mathrm{l}}} \times \vec{E} = 0$$

handelt es sich um eine TE- Welle. Der Reflektionsfaktor wird wie oben berechnet.

Einige Studenten haben auch versucht, die Vektorkomponenten aus den Stetigkeitsbedingungen

$$\vec{n} \circ (\vec{k_{\mathrm{r}}} + \vec{k_{\mathrm{i}}}) = 0 \quad ,$$

$$\vec{n} \times (\vec{k_{\mathrm{r}}} - \vec{k_{\mathrm{i}}}) = 0$$

und

$$\vec{n} \times (\vec{k_{\mathrm{t}}} - \vec{k_{\mathrm{i}}}) = 0$$

zu bestimmen. Dies führt allein für $\vec{k_{\mathrm{r}}}$ auf vier Gleichungen mit drei Unbekannten, lässt sich aber mit etwas Aufwand lösen. Der Versuch, die Komponenten von $\vec{k_{\mathrm{t}}}$ zu bestimmen, scheitert daran, dass eine Gleichung fehlt (das Kreuzprodukt führt nur auf zwei unabhängige Gleichungen). Es muss also der oben beschriebene Weg über die Tangentialvektoren beschritten werden.