Elektromagnetische Felder und Wellen

Klausur Frühjahr 2000

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Auf der Kugeloberfläche vom Radius R ist das elektrostatische Potenzial V an jeder Stelle auf der Oberfläche bekannt. Wie lautet das Potenzial im ladungsfreien Raum ausserhalb der Kugel? Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass sich der Kugelmittelpunkt im Ursprung befindet. Es genügt, für das Potenzial den (richtig substituierten) Integralausdruck anzugeben. Verwenden Sie Greensche Funktionen!

Aufgabe 2 (9 Punkte)

In einem Raum mit der relativen Permeabilität μ liegt eine ebene rechteckige vom Strom I durchflossene Leiterschleife mit den Kantenlängen a und b. Welche magnetische Induktion $\vec{B}$ erzeugt die Leiterschleife in der Ebene, in der sie liegt? Benutzen Sie das magnetische Dipolmoment.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

In einem Medium mit den Materialkonstanten μ und ϵ herrscht das elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e_{\mathrm{x}}} \exp\{i(k\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \omega t)\}$. Wie groß ist $\vec{H}$?

Aufgabe 4 (13 Punkte)

Eine TE- Welle trifft auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Materialkonstanten $\epsilon_1, \epsilon_2, \mu_1$ und μ_2. Wie groß ist der Brewsterwinkel (gemessen gegen die Flächennormale)? Welche Bedingungen müssen die Materialkonstanten erfüllen, damit überhaupt ein Brewsterwinkel existiert?

Aufgabe 5 (12 Punkte)

An der Stirnseite eines Gradientenfilmes bilde sich das elektrische Feld $E = E_0 \exp\{-(\frac{x}{a})^2\} \cdot \exp\{i\omega t\}$ aus. Wie lautet das Raumfrequenzspektrum des Feldes? Bei

welcher Raumfrequenz $k_{\mathrm{x}10}$ ist das Spektrum auf 10% seines Maximalwertes abgeklungen? Unter welchen Bedingungen für den Fleckradius a erfüllt $k_{\mathrm{x}10}$ die Fresnelbedingung?
Hilfen:
$g \gg h$ soll für $g \geq 10h$ erfüllt sein, $\ln\{10\} = 2.3$, $\sqrt{\ln\{10\}} = 1.52$.

$$\int_0^\infty \exp\{-by^2\}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

In einem in z-Richtung unendlich ausgedehnten metallischem Rohr mit halbkreisförmigen Querschnitt befindet sich eine in z-Richtung unendlich ausgedehnte Linienladung ρ_l. Skizzieren sie die Anordnung mit sämtlichen auftretenden Spiegelladungen und geben sie deren Größe und Ort an.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Der Halbraum (1) $x < 0$ habe die relative Dielektrizitätskonstante ε_1 und Leitfähigkeit σ_1, der Halbraum (2) ε_2, σ_2. Im Halbraum (1) beträgt die statische Stromdichte $\vec{j}_1 = j_x\vec{e}_x + j_y\vec{e}_y$. Wie groß ist die Stromdichte $\vec{j}_2$ im Halbraum (2)?

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Berechnet werden soll das Vektorpotenzial $\vec{A}$ eines unendlich langen elektrischen Leiters der relativen Permeabilität $\mu = 1$. Der Leiter habe den Radius a und werde vom Strom J durchflossen. Bestimmen Sie zunächst die Richtung von $\vec{A}$ aus dem integralen Zusammenhang mit $\vec{j}$. Nehmen Sie an, dass die Stromdichte auf dem Zylinderquerschnitt homogen ist und nur in Achsrichtung weist. Verwenden Sie im weiteren die differentielle Darstellung. Benutzen Sie bei Ihrer Rechnung Zylinderkoordinaten und beachten Sie, dass das Potenzial nur vom Abstand zum Leiter abhängt. Berechnen Sie auch das Potential innerhalb des Leiters und geben Sie ein insgesamt stetiges Vektorpotential an. Als Randbedingung soll $\vec{A}\left\{\vec{0}\right\} = \vec{0}$ und $\vec{B}\left\{\vec{0}\right\} = \vec{0}$ gelten.

Aufgabe 9 (2 Punkte)

In einer Lösung hänge eine kugelförmige Elektrode mit Radius R. Der Strom I wird über ein isoliertes Kabel zugeführt. Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{j}$ auf der Kugeloberfläche ohne Randeffekte zu berücksichtigen.

Aufgabe 10 (12 Punkte)

Die Kapazität pro Längeneinheit zweier zylinderförmiger Leiter der Radien a_1 und a_2 soll näherungsweise berechnet werden. Der positiv geladene Leiter trägt pro Längeneinheit die Ladungsdichte ρ_{L}. Die längenbezogene Kapazität errechnet sich aus $C_{\mathrm{L}} = C/L = \Delta\rho_{\mathrm{L}}/\Delta U$. Die Leiterachsen befinden sich im Abstand d voneinander. Zeigen Sie, dass sich die Kapazität im freien Raum , durch

$$C_{\mathrm{L}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\frac{d}{a}}$$

beschreiben lässt. Dabei soll $a = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ gelten. Als Näherungen soll benutzt werden, dass die Radien (a_1, a_2) wesentlich kleiner als der Abstand d sind und dass sich die Felder der Leiter ungestört überlagern. Bestimmen Sie zunächst das elektrostatische Potential eines einzelnen geladenen Leiters auf der Verbindungslinie zwischen den Zylinderachsen im ansonsten leeren Raum.

Aufgabe 11 (2 Punkte)

Ein Urankern enthält 92 Protonen. Als Modell soll der Kern als eine Kugel mit Radius $R = 10\,\mathrm{fm}$ angenommen werden. Für die beiden Fälle, dass

(a) die Ladung dreidimensional homogen in der Kugel verteilt ist

und

(b) die Ladung homogen auf der Kugeloberfläche verteilt ist,

sollen die Ladungsverteilungen $\varrho_{\mathrm{v}}\left\{\vec{r}\right\}$ angegeben werden. Nutzen Sie dabei die Kugelsymmetrie des Problems!

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Auf der x-Achse befinden sich im Bereich $[-l/2\ , l/2]$ $N+1$ äquidistant angeordnete Dipole $p_0 \ldots p_N$ mit den Dipolmomenten $\vec{p_i} = \frac{p_\mathrm{g}}{N+1}\vec{e_\mathrm{z}}$, $N \in \mathbb{N}_0$. Skizzieren Sie die Anordnung in der x-z Ebene für ungerades N. Bleibt das Feld unverändert, wenn eine dünne, unendlich ausgedehnte metallische Platte bei $x = 0$ in die y-z Ebene geschoben wird? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Durch ein elektrisch leitendes Rohr fliesst ein Strom I und verteilt sich gleichmässig über den Rohrquerschnitt $r_1 \leq r \leq r_2$. In der Vorlesung wurden zwei mögliche Ansätze zur Berechnung der magnetische Feldstärke $\vec{H}$ behandelt. Geben Sie die beiden Lösungsansätze für diesen Spezialfall unter Berücksichtigung der vorhandenen Symmetrien an. Unterschieden Sie hierbei die drei Bereiche $r < r_1$, $r_1 \leq r \leq r_2$ und $r > r_2$.