Aufgabe 1

Auf der Kugeloberfläche vom Radius R ist das elektrostatische Potenzial V an jeder Stelle auf der Oberfläche bekannt. Wie lautet das Potenzial im ladungsfreien Raum ausserhalb der Kugel? Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass sich der Kugelmittelpunkt im Ursprung befindet. Es genügt, für das Potenzial den (richtig substituierten) Integralausdruck anzugeben. Verwenden Sie Greensche Funktionen!

Lösung

Im Ladungsfreien Raum errechnet sich das elektrostatische Potenzial mit der Greenschen Funktion des Raumes aus dem Potenzial auf der Berandung V_r mit

$$V = \frac{1}{4\pi} \int\int_{S_\mathrm{k}} [V_\mathrm{r}(\nabla' G\{\vec{r}, \vec{r'}\}) \circ \vec{e'_\mathrm{r}}] \vec{e'_\mathrm{r}} \circ \mathrm{d}^2\vec{S'} \quad .$$

Für den hier vorliegenden Fall der Kugel lautet die Greensche Funktion

$$G\{\vec{r}, \vec{r'}\} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \left(\frac{R}{r'}\right)^2 \vec{r'}|} \frac{R}{r'}$$

und das Oberflächenelement ist $\mathrm{d}^2\vec{S'} = \sin\{\theta'\} R^2 \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi' \vec{e'_\mathrm{r}}$, wenn man den Ursprung in die Kugelmitte legt. Zusammen resultiert also

$$V = \frac{1}{4\pi} \int\int_{S_\mathrm{k}} V_\mathrm{r}(\nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \left(\frac{R}{r'}\right)^2 \vec{r'}|} \frac{R}{r'}) \circ \vec{e'_\mathrm{r}} \sin\{\theta'\} R^2 \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi' \quad .$$

Im Script ist dieser Ausdruck noch etwas weiter ausgewertet worden und die Lösung lautet dann

$$V\{r, \theta, \varphi\} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v_\mathrm{r} \frac{-(r^2 - r_0^2) r_0^2}{r_0 (r^2 + r_0^2 - 2 r_0 r \cos\{\gamma\})^{3/2}} \sin\{\theta'\}\, \mathrm{d}\theta'\, \mathrm{d}\varphi'$$

mit dem Winkel γ zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r'}$

$$\cos\{\gamma\} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{|\vec{r}||\vec{r'}|} = \sin\{\theta\} \sin\{\theta'\} (\cos\{\varphi\} \cos\{\varphi'\} + \sin\{\varphi\} \sin\{\varphi'\}) + \cos\{\theta\} \cos\{\theta'\} \quad .$$

Aufgabe 2

In einem Raum mit der relativen Permeabilität μ liegt eine ebene rechteckige vom Strom I durchflossene Leiterschleife mit den Kantenlängen a und b. Welche magnetische Induktion

$\vec{B}$ erzeugt die Leiterschleife in der Ebene, in der sie liegt? Benutzen Sie das magnetische Dipolmoment.

Lösung

Das magnetische Moment einer einfach zusammenhängenden ebenen Leiterschleife beliebiger Form mit Strom I entlang der Kurve C ist

$$\vec{m} = I S_{\mathrm{C}} \vec{n}$$

wobei die Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$ auf die Fläche der Schleife $S_{\mathrm{C}} = a \cdot b$ als Binormalenvektor aus der Stromrichtung folgt. Die magnetische Induktion ist

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \circ \frac{\vec{r}}{r})\frac{\vec{r}}{r} - \vec{m}}{r^3}$$

und weil nur Punkte in der Ebene betrachtet werden sollen, in der die Leiterschleife liegt, gilt mit $\vec{r} \circ \vec{n} = 0$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot a \cdot b}{r^3} \vec{n}$$

Aufgabe 3

In einem Medium mit den Materialkonstanten μ und ϵ herrscht das elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e_{\mathrm{x}}} \exp\{i(k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \omega t)\}$. Wie groß ist $\vec{H}$?

Lösung

Aus den Maxwell- Gleichungen folgt sofort mit

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

wegen der harmonischen zeitabhängigkeit von $\vec{E}$ in homogenen Medien mit $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{1}{i\omega\mu\mu_0} \nabla \times \vec{E} \quad .$$

Unter Berücksichtigung des Wellenwiderstandes $Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}$ resultiert

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{i\omega\mu\mu_0} (\frac{\partial}{\partial z} \vec{E} \circ \vec{e_{\mathrm{x}}}) \vec{e_{\mathrm{y}}} - (\frac{\partial}{\partial x} \vec{E} \circ \vec{e_{\mathrm{x}}}) \vec{e_{\mathrm{z}}} \\
&= \frac{E_0}{Z} \exp\{i(k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \omega t)\} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} [z \vec{e_{\mathrm{y}}} - y \vec{e_{\mathrm{z}}}] \\
&= \frac{\vec{r} \times \vec{E}}{rZ}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Eine TE- Welle trifft auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit den Materialkonstanten $\epsilon_1, \epsilon_2, \mu_1$ und μ_2. Wie groß ist der Brewsterwinkel (gemessen gegen die Flächennormale)? Welche Bedingungen müssen die Materialkonstanten erfüllen, damit überhaupt ein Brewsterwinkel existiert?

Lösung

Beim Brewster- Winkel wird der Reflexionsfaktor $r = 0$. Im Skript findet man die Gleichung für den Reflexionsfaktor einer TE- Welle in magnetischen Medien an verschiedenen Stellen. Optimal ist die Darstellung, bei der nur noch der Einfallswinkel θ_i als Variable vorkommt. Mit obiger Bedingung folgt unter Berücksichtigung von $n = \sqrt{\mu\epsilon}$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\{\theta_\mathrm{i}\} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}\sqrt{1 - \frac{\mu_1\epsilon_1}{\mu_2\epsilon_2}\sin^2\{\theta_\mathrm{i}\}} \quad .$$

Mit $\cos\{\theta\} = \sqrt{1-\sin^2\{\theta\}}$ folgt nach Umstellen

$$\sin\{\theta_\mathrm{i}\} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_1}\frac{\mu_1\epsilon_2 - \mu_2\epsilon_1}{\mu_1^2 - \mu_2^2}} = \frac{1}{n_1}\sqrt{\frac{\mu_1^2 n_2^2 - \mu_2^2 n_1^2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}}$$

und für $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow n_2 > n_1\frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Aufgabe 5

An der Stirnseite eines Gradientenfilmes bilde sich das elektrische Feld $E = E_0\exp\{-(\frac{x}{a})^2\}\cdot\exp\{i\omega t\}$ aus. Wie lautet das Raumfrequenzspektrum des Feldes? Bei welcher Raumfrequenz $k_{\mathrm{x}10}$ ist das Spektrum auf 10% seines Maximalwertes abgeklungen? Unter welchen Bedingungen für den Fleckradius a erfüllt $k_{\mathrm{x}10}$ die Fresnelbedingung?

Hilfen:

$g \gg h$ soll für $g \geq 10h$ erfüllt sein, $\ln\{10\} = 2.3$, $\sqrt{\ln\{10\}} = 1.52$.

$$\int_0^\infty \exp\{-by^2\}\mathrm{d}y = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Lösung

Das (eindimensionale) Raumfrequenzspektrum lautet

$$\begin{aligned}
\tilde{E}\{k_{\mathrm{x}}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} E \exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\}\mathrm{d}x \\
&= E_0 \exp\{i\omega t\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(\frac{x}{a})^2 \exp\{-ik_{\mathrm{x}}x\}\mathrm{d}x \\
&= E_0 \exp\{i\omega t - (\frac{k_{\mathrm{x}}a}{2})^2\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-(\frac{x}{a} + i\frac{k_{\mathrm{x}}a}{2})^2\mathrm{d}x \quad .
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $y = x + i\frac{k_{\mathrm{x}}a^2}{2}$ und $b = \frac{1}{a^2}$ resultiert aus dem Vergleich mit dem Hinweis

$$\tilde{E}\{k_{\mathrm{x}}\} = E_0 \exp\left\{i\omega t - \left(\frac{k_{\mathrm{x}}a}{2}\right)^2\right\} \frac{2\sqrt{\pi}}{a} \quad .$$

Das Spektrum ist auf 10% abgeklungen, wenn $\exp\{-(\frac{k_{\mathrm{x}10}a}{2})^2\} = 0.1$ ist. Daraus resultiert $k_{\mathrm{x}10} = \frac{2}{a}\sqrt{\ln\{10\}} = \frac{3.04}{a}$.
Die Fresnelbedingung lautet $k_{\mathrm{x}} \ll k$ für alle relevanten k_{x}. Mit der angegebenen Näherung folgt also $10k_{\mathrm{x}10} = \frac{30.4}{a} < k$ bzw. $ka > 30.4$.

Aufgabe 6

In einem in z-Richtung unendlich ausgedehnten metallischem Rohr mit halbkreisförmigen Querschnitt befindet sich eine in z-Richtung unendlich ausgedehnte Linienladung ρ_l. Skizzieren sie die Anordnung mit sämtlichen auftretenden Spiegelladungen und geben sie deren Größe und Ort an.

Lösung
Spiegelungsmethode: Reale Ladungen innerhalb eines metallisch berandeten Bereiches werden um Spiegelladungen erweitert derart, daß die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes auf der gesamten Berandung verschwindet. Die Berandung kann jetzt entfernt werden, ohne daß sich das elektrische Feld innerhalb des Bereiches ändert. Das Feld außerhalb ist natürlich nicht richtig.
Lösung über bekannte Probleme:
Ebene Metallfläche bei $y = 0$: <u>Jede</u> Linienladung ϱ_L am Ort (r, φ) wird um eine Spiegelladung $-\varrho$ am Ort $(r, -\varphi)$ erweitert.

Ein metallisches Rohr mit Radius R und Achse bei $(x, y) = (0, 0)$: <u>Jede</u> Linienladung ϱ_L am Ort (r, φ) wird um eine Spiegelladung $-\varrho$ am Ort $(R^2/r, \varphi)$ erweitert.
Es ergeben sich daher folgende Ladungen:

	Ladung	Größe	Ort
1.	Originalladung	ϱ_1	(r, φ)
2.	Spiegelladung	$-\varrho_1$	$(r, -\varphi)$
3.	Spiegelladung	$-\varrho_1$	$(R^2/r, \varphi)$
4.	Spiegelladung	ϱ_1	$(R^2/r, -\varphi)$

Ladung (4) ist eine zweifach gespiegelte Ladung, ihre Existenz ist notwendig, damit die Tangentialkomponente des elektrische Feldes auf der Berandung verschwindet:
Die Ladungen (1) und (2) summieren sich zu $V\{y = 0\} =$ konst, Ladung (3) und (4) ebenfalls, wegen Superposition ist daher $V\{y = 0\} =$ konst.
Die Ladungen (1) und (3) summieren sich zu $V\{r = R\} =$ konst, Ladung (2) und (4) ebenfalls, wegen Superposition ist daher $V\{r = R\} =$ konst.

Aufgabe 7

Der Halbraum (1) $x < 0$ habe die relative Dielektrizitätskonstante ε_1 und Leitfähigkeit σ_1, der Halbraum (2) ε_2, σ_2. Im Halbraum (1) beträgt die statische Stromdichte $\vec{j}_1 = j_x \vec{e}_x + j_y \vec{e}_y$. Wie groß ist die Stromdichte $\vec{j}_2$ im Halbraum (2)?
Lösung

$$\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = \frac{\partial \varrho_\mathrm{s}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad j_\mathrm{x1} = j_\mathrm{x2}$$

$$E_{\tan,1} = E_{\tan,2} \quad \Rightarrow \quad \frac{j_\mathrm{y1}}{\sigma_1} = \frac{j_\mathrm{ßy2}}{\sigma_2}$$

<u>Anmerkung</u>
Ein häufiger Fehler ist die Annahme, D_norm sei stetig. Dies gilt nur wenn, keine Flächenladung an der Grenzfläche auftritt.
Aus der Annahme ergibt sich im allgemeinen ein Widerspruch:

$$D_{\mathrm{norm},1} = D_{\mathrm{norm},2} \quad \Rightarrow \quad j_{\mathrm{norm},1} \neq j_{\mathrm{norm},2} \quad \Rightarrow \quad \varrho_\mathrm{s} = f(t) \quad \Rightarrow \quad D_{\mathrm{norm},1} \neq D_{\mathrm{norm},2}$$

Aufgabe 8

Berechnet werden soll das Vektorpotenzial $\vec{A}$ eines unendlich langen elektrischen Leiters der relativen Permeabilität $\mu = 1$. Der Leiter habe den Radius a und werde vom Strom J durchflossen. Bestimmen Sie zunächst die Richtung von $\vec{A}$ aus dem integralen Zusammenhang mit $\vec{j}$. Nehmen Sie an, dass die Stromdichte auf dem Zylinderquerschnitt homogen ist und nur in Achsrichtung weist. Verwenden Sie im weiteren die differentielle Darstellung. Benutzen Sie bei Ihrer Rechnung Zylinderkoordinaten und beachten Sie, dass das Potenzial nur vom Abstand zum Leiter abhängt. Berechnen Sie auch das Potential innerhalb des Leiters und geben Sie ein insgesamt stetiges Vektorpotential an. Als Randbedingung soll $\vec{A}\left\{\vec{0}\right\} = \vec{0}$ und $\vec{B}\left\{\vec{0}\right\} = \vec{0}$ gelten.

Lösung

Die Mittellinie des Leiters liege auf der z-Achse. Da dann $\vec{j}$ nur eine Komponente in z-Richtung besitzt, folgt aus dem integralen Zusammenhang, dass es auch nur eine z-Komponente von $\vec{A}$ geben kann.

Es gilt:

$$\Delta\vec{A}\{\vec{r}\} = -\mu_0\mu_\mathrm{r}\vec{j}\{\vec{r}\}$$

Da weiterhin laut Aufgabe

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \vec{A}\{r\}$$

gilt, lässt sich dieses vereinfachen zu:

$$\Delta\vec{A}\{r\} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\vec{A}(r)\right)$$

mit:

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi a^2}\vec{e_\mathrm{z}}; \quad r \leq a$$

gilt für $\mu_\mathrm{r} = 1$, also im Leiterinneren:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\vec{A}\right) = -\mu_0 r\frac{I}{\pi a^2}\vec{e_\mathrm{z}}$$

Nach den beiden Integrationen erhält man:

$$\vec{A}\{r\} = \left(-\frac{-\mu_0 I}{4\pi a^2}r^2 + d_1\ln\{r\} + d_2\right)\vec{e_\mathrm{z}}$$

Es wird

$$\vec{A}\left\{\vec{0}\right\} = \vec{0}$$

gefordert, also ist $d_1 = d_2 = 0$.

Im Aussenraum gilt:

$$\vec{j} = \vec{0}; \quad r > a$$

Die Integration liefert:

$$\vec{A}\left\{r\right\} = \left(\ln\left\{\frac{r}{a}\right\} d_3 + d_4\right) \vec{e_\mathrm{z}}$$

Um Stetigkeit bei $r = a$ zu gewährleisten, muss gelten:

$$d_4 = \frac{-\mu_0 I}{4\pi} a$$

Aufgabe 9

In einer Lösung hänge eine kugelförmige Elektrode mit Radius R. Der Strom I wird über ein isoliertes Kabel zugeführt. Berechnen Sie die Stromdichte $\vec{j}$ auf der Kugeloberfläche ohne Randeffekte zu berücksichtigen.

Lösung

Man lege den Ursprung des Kugelkoodinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel. Dann ist der Betrag der Stromdichte durch Strom pro Fläche gegeben und die Ausbreitungsrichtung ist in radialer Richtung:

$$\vec{j} = \frac{I}{4\pi R^2} \vec{e_\mathrm{r}}$$

Aufgabe 10

Die Kapazität pro Längeneinheit zweier zylinderförmiger Leiter der Radien a_1 und a_2 soll näherungsweise berechnet werden. Der positiv geladene Leiter trägt pro Längeneinheit die Ladungsdichte ρ_L. Die längenbezogene Kapazität errechnet sich aus $C_\mathrm{L} = C/L = \Delta\rho_\mathrm{L}/\Delta U$. Die Leiterachsen befinden sich im Abstand d voneinander. Zeigen Sie, dass sich die Kapazität im freien Raum , durch

$$C_{\mathrm{L}} \approx \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\left\{\frac{d}{a}\right\}}$$

beschreiben lässt. Dabei soll $a = \sqrt{a_1 \cdot a_2}$ gelten. Als Näherungen soll benutzt werden, dass die Radien (a_1, a_2) wesentlich kleiner als der Abstand d sind und dass sich die Felder der Leiter ungestört überlagern. Bestimmen Sie zunächst das elektrostatische Potential eines einzelnen geladenen Leiters auf der Verbindungslinie zwischen den Zylinderachsen im ansonsten leeren Raum.

Lösung

Im Aussenraum eines einzelnen geladenen Leiters mit Radius a_1, der mit seiner Mittellinie auf der z-Achse liegt, lässt sich das elektrische Potential aus dem elektrischen Feld der Ladungsverteilung aus

$$\nabla\vec{E}_1 = \frac{\rho_1}{\epsilon\epsilon_0}$$

berechnen, falls man die Zylindersymmetrie ausnutzt. Aus:

$$\vec{E}_1\left\{r\right\} = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

folgt durch weitere Integration:

$$V_1\left\{r\right\} = \frac{\rho_1}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{a_1}{r}$$

Da die beiden Leiter als voneinander unabhõngig betrachtet werden sollen, ergibt sich die Potentialdifferenz zu:

$$\Delta U = |V_1 - V_2|$$

Da die Leiter entgegengesetzte Ladung tragen müssen gilt:

$$\rho_1 = -\rho_2 = \rho_{\mathrm{L}}$$

Und somit bei $r = d$:

$$\Delta U = \left|\frac{\rho_{\mathrm{L}}}{2\pi\epsilon_0}\ln\{\frac{a_1}{d}\} - \frac{-\rho_{\mathrm{L}}}{2\pi\epsilon_0}\ln\{\frac{a_2}{d}\}\right| = \frac{\rho_{\mathrm{L}}}{\pi\epsilon_0}\ln\{\frac{d}{\sqrt{a_1 a_2}}\}$$

Die Kapazität berechnet man nun durch:

$$C = \frac{\rho_\mathrm{L}}{\frac{\rho_\mathrm{L}}{\pi\epsilon_0}\ln\{\frac{d}{a}\}} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln\{\frac{d}{a}\}}$$

Aufgabe 11

Ein Urankern enthält 92 Protonen. Als Modell soll der Kern als eine Kugel mit Radius $R = 10\,\mathrm{fm}$ angenommen werden. Für die beiden Fälle, dass

(a) die Ladung dreidimensional homogen in der Kugel verteilt ist

und

(b) die Ladung homogen auf der Kugeloberfläche verteilt ist,

sollen die Ladungsverteilungen $\varrho_\mathrm{v}\{\vec{r}\}$ angegeben werden. Nutzen Sie dabei die Kugelsymmetrie des Problems!

Lösung

Man legt den Koordinaten Ursprung in den Mittelpunkt des Kerns, dann ist das Problem perfekt kugelsymmetrisch. Die Kugel trägt in beiden Fällen die Ladung Q aus 92 Elementarladungen.

(a)

$$\rho\{\vec{r}\} = \begin{cases} \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} & \text{für } |\vec{r}| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

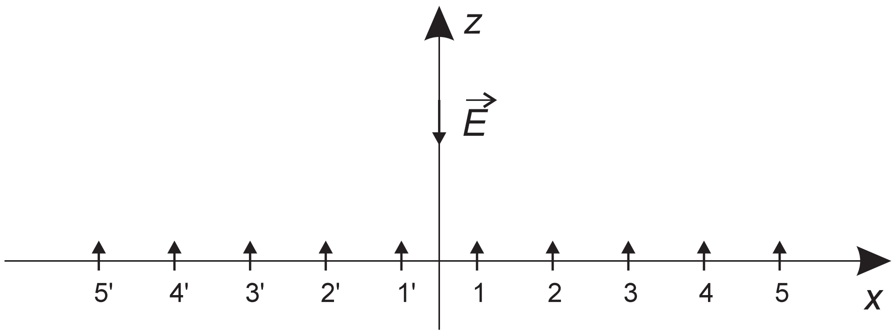
(b)

$$\rho\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta\left\{|\vec{r}| - R\right\}$$

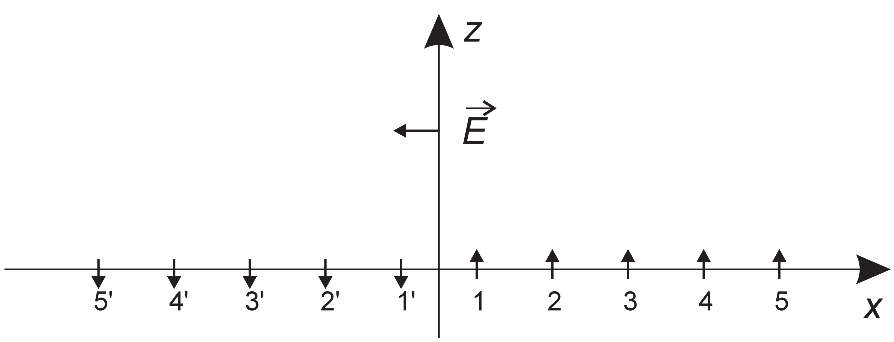
Aufgabe 12

Auf der x-Achse befinden sich im Bereich $[-l/2\ , l/2]$ $N+1$ äquidistant angeordnete Dipole $p_0 \dots p_N$ mit den Dipolmomenten $\vec{p}_i = \frac{p_\mathrm{g}}{N+1}\vec{e}_\mathrm{z}$, $N \in \mathbb{N}_0$. Skizzieren Sie die Anordnung in der x-z Ebene für ungerades N. Bleibt das Feld unverändert, wenn eine dünne, unendlich ausgedehnte metallische Platte bei $x = 0$ in die y-z Ebene geschoben wird? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung



Für ungerades N befinden sich eine gerade Anzahl von äquidistant angeordneten Dipolen auf der x-Achse.
Das Feld eines einzelnen Dipols ist rotationssymmetrisch um die Dipolachse. D.h. der elektrische Feldvektor zweier Spiegeldipole, z.B. 1 und 1', hat in der y-z Ebene einen Anteil in dieser Ebene aber keinen Anteil senkrecht dazu. Schiebt man nun eine unendlich ausgedehnte metallische Platte bei $x = 0$ in die y-z Ebene, dann ändert sich das Feld obiger Anordnung.
Bei folgender Anordnung der Dipole ist das nicht Fall, da der elektrische Feldvektor in der y-z Ebene senkrecht auf diese Ebene steht.



Aufgabe 13

Durch ein elektrisch leitendes Rohr fliesst ein Strom I und verteilt sich gleichmässig über den Rohrquerschnitt $r_1 \leq r \leq r_2$. In der Vorlesung wurden zwei mögliche Ansätze zur Berechnung der magnetische Feldstärke $\vec{H}$ behandelt. Geben Sie die beiden Lösungsansätze für diesen Spezialfall unter Berücksichtigung der vorhandenen Symmetrien an. Unterscheiden Sie hierbei die drei Bereiche $r < r_1$, $r_1 \leq r \leq r_2$ und $r > r_2$.

Lösung

Das Rohr habe seine Achse auf der z-Achse. Dann gilt:

$$\vec{j} = \frac{I\vec{e}_z}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \begin{cases} 1 & r_1 \le \rho \le r_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wegen der Rotationssysmmetrie und Translationssymmetrie der Anordnung um bzw. entlang der z-Achse ist nur die Azimutalkomponente der magnetischen Feldstärke ortsabhängig. Diese Ortsabhängigkeit beschränkt sich wegen der Symmetrie auf die Radialkoordinate ρ.

$$\vec{H} = H_\phi\left\{\rho\right\}\vec{e}_\phi + H_\rho\vec{e}_\rho + H_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}.$$

Außerdem gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = 0$.

Lösungsansatz 1: Differentialform des Ampèreschen Gesetzes

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right) &= \frac{I\vec{e}_z}{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)} \begin{cases} 1 & r_1 \le \rho \le r_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird einfach durch Intergation über beide Seiten $\int_\infty^\rho \mathrm{d}\rho'$ gelöst.

Lösungsansatz 2: Integralform des Ampèreschen Gesetzes

$$\oint_C \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \int\int_{S_\mathrm{C}} \vec{j}\mathrm{d}^2\vec{S}$$

Ist C ein Kreis mit Mittelpunkt auf der z-Achse, der die Fläche S_C umschließt, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{l} &= \rho'\mathrm{d}\phi'\vec{e}_\phi \\ \mathrm{d}^2\vec{S} &= \rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'\vec{e}_\mathrm{z}. \end{aligned}$$

Die magnetische Feldstärke kann aus folgender Integralgleichung berechnet werden:

$$\int_0^{2\pi} H_\phi\rho'\mathrm{d}\phi' = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \vec{j}\vec{e}_z\vec{j}\rho'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}\rho'.$$