Aufgabe 1

Die magnetische Induktion außerhalb einer begrenzten Stromverteilung resultiert mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m}$ und dem Abstand zum Dipolmoment $\vec{r}$ aus

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \circ \frac{\vec{r}}{r})\frac{\vec{r}}{r} - \vec{m}}{r^3} \quad .$$

Hier ist $\vec{m} = m\vec{e}_\mathrm{z}$ und $\vec{r} = (a-b)\vec{e}_\mathrm{z}$, so dass mit $\frac{\vec{r}}{r} = \frac{a-b}{|a-b|}\vec{e}_\mathrm{z}$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m\vec{e}_\mathrm{z}}{|a-b|^3} \quad .$$

folgt.

Aufgabe 2

An einer Grenzfläche gilt für das Magnetfeld

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_\mathrm{s} \quad .$$

Hier ist $\vec{H}_2 = 0$ und somit muss mit $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{x}$ ein Flächenstrom der Größe

$$\vec{j}_\mathrm{s} = \vec{n} \times (-\vec{H}_1) = -H\vec{e}_\mathrm{z}$$

existieren.

Aufgabe 3

Für eine TE- Welle ist der Reflexionsfaktor in unmagnetischen Medien ($\mu_1 = \mu_2 = 1$)

$$r = \frac{\frac{\vec{n}\circ\vec{k}_1}{\mu_1} - \frac{\vec{n}\circ\vec{k}_2}{\mu_2}}{\frac{\vec{n}\circ\vec{k}_1}{\mu_1} + \frac{\vec{n}\circ\vec{k}_2}{\mu_2}} = \frac{n_\mathrm{c}\cos\{\theta\} - \sqrt{n_\mathrm{m}^2 - n_\mathrm{c}^2\sin\{\theta\}}}{n_\mathrm{c}\cos\{\theta\} + \sqrt{n_\mathrm{m}^2 - n_\mathrm{c}^2\sin\{\theta\}}}$$

wobei hier $k_1 = n_\mathrm{c}k_0$, $k_2 = n_\mathrm{m}k_0$ und $k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi}{\lambda}$ zu nehmen ist. Es gibt zwei mögliche Lösungen:

(1) Willkürlich wird gemäß der Abbildung die y- Richtung nach oben und die z- Richtung nach rechts gewählt und damit ist $\vec{n} = -e_\mathrm{y}$. Aus den Stetigkeitsbedingungen an der Stirnseite ergeben sich die Komponenten von $\vec{k}_1$ und mit den Stetigkeitsbedingungen an der Kern- Mantel- Grenzfläche die Komponenten von $\vec{k}_2$.

Für die einfallende Welle gilt $\vec{k}_0 = k_0(-\sin\{\phi_\mathrm{m}\}\vec{e}_\mathrm{y} + \cos\{\phi_\mathrm{m}\}\vec{e}_\mathrm{z})$ und somit weiter $\vec{k}_1 \circ \vec{n} = \vec{k}_0 \circ \vec{n} = k_0 \frac{n_\mathrm{c}-n_\mathrm{m}}{2}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\vec{k}_1 \circ \vec{e}_\mathrm{z} &= \vec{k}_2 \circ \vec{e}_\mathrm{z} \\
&= \sqrt{\|\vec{k}_1\|^2 - \|\vec{k}_0 \circ \vec{n}\|^2} = k_0 \sqrt{n_\mathrm{c}^2 - (\frac{n_\mathrm{c}-n_\mathrm{m}}{2})^2} \\
&= \frac{k_0}{2}\sqrt{3n_\mathrm{c}^2 + 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{c} - n_\mathrm{m}^2} \quad .
\end{aligned}$$

Mit $\vec{k}_2 \circ \vec{e}_\mathrm{z}$ resultiert $\vec{k}_2 \circ \vec{n}$ aus

$$\vec{k}_2 \circ \vec{n} = \sqrt{\|\vec{k}_2\|^2 - \|\vec{k}_2 \circ \vec{e}_\mathrm{z}\|^2} = \frac{k_0}{2}\sqrt{5n_\mathrm{m}^2 - 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{c} - 3n_\mathrm{c}^2} \quad .$$

Das Argument unter der Wurzel ist negativ, wie man durch umformen $5n_\mathrm{m}^2 - 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{c} - 3n_\mathrm{c}^2 < 5n_\mathrm{m}^2 - 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{m} - 3n_\mathrm{c}^2 = 3(n_\mathrm{m}^2 - n_\mathrm{c}^2) < 0$ leicht feststellt. Somit wird der Reflexionsfaktor komplex mit Betrag $|r| = 1$ und

$$\arg\{r\} = -2\arctan\left\{\sqrt{\frac{3n_\mathrm{c}^2 + 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{c} - 5n_\mathrm{m}^2}{n_\mathrm{c}^2 - 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{c} + n_\mathrm{m}^2}}\right\} \quad .$$

(2) An der Stirnfläche gilt das Snelliusgesetz $\sin\{\phi_\mathrm{m}\} = n_\mathrm{c}\cos\{\theta\}$ wobei die Winkel bereits richtig eingesetzt wurden. Für $\sin\{\theta\}$ wird $\sqrt{1-\cos^2\{\theta\}}$ in den obigen Reflexionsfaktor eingesetzt und es folgt nach Umrechnung das Resultat

$$r = \frac{n_\mathrm{c} - n_\mathrm{m} - \sqrt{4n_\mathrm{m}^2 - [4n_\mathrm{c}^2 - (n_\mathrm{c}-n_\mathrm{m})^2]}}{n_\mathrm{c} - n_\mathrm{m} + \sqrt{4n_\mathrm{m}^2 - [4n_\mathrm{c}^2 - (n_\mathrm{c}-n_\mathrm{m})^2]}} = \frac{n_\mathrm{c} - n_\mathrm{m} - \sqrt{5n_\mathrm{m}^2 - 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{c} - 3n_\mathrm{c}^2]}}{n_\mathrm{c} - n_\mathrm{m} + \sqrt{5n_\mathrm{m}^2 - 2n_\mathrm{m}n_\mathrm{c} - 3n_\mathrm{c}^2]}}$$

was wie oben weiter diskutiert werden muss.

Aufgabe 4

Die Zuordnung der Kreise zu den Ellipsen erfolgt durch Einsetzen jeweils eines Punktes in die Abbildung $z\{w = 2r_0\} = \frac{d}{2}(2 + \frac{1}{2}) = 1.25\,\mathrm{mm}$ sowie $z\{w = 3r_0\} = \frac{d}{2}(3 + \frac{1}{3}) = 1.66\,\mathrm{mm}$. Der kleinere Kreis wird also auf die kleinere Ellipse abgebildet. Das Potenzial eines Zylinderkondensators mit Innenradius r_1, Außenradius r_2 und Spannung U ist aus der Übung mit $V\{w\} = U\frac{\mathrm{Ln}\{w/r_1\}}{\ln\{r_2/r_1\}}$ bekannt. Des weiteren ist bekannt, dass es sich hier um ein Originalproblem handelt, so dass das elektrische Feld aus dem Potenzial $V\{w\} = U\frac{\mathrm{Ln}\{w/2r_0\}}{\ln\{1.5\}}$ berechnet werden muss. Hier ist die Rücktransformation nicht direkt ausführbar, so dass die parametrische Darstellung $E^*\{z\{w\}\} = -\frac{\nabla_\mathrm{w} V}{\nabla_\mathrm{w} z}$ verwendet werden muss. Es gilt $\nabla_\mathrm{w} V = \frac{U}{\ln\{1.5\}}\frac{1}{w}$ und $\nabla_\mathrm{w} z = \frac{d}{2r_0}[1-(\frac{r_0}{w})^2]$ und damit

$$\begin{aligned} E^*\{z\{w\}\} &= -\frac{U}{d}\frac{2}{\ln\{1.5\}}\frac{1}{\frac{w}{r_0}[1-(\frac{r_0}{w})^2]} = -U\frac{2}{\ln\{1.5\}}\frac{1}{d[\frac{w}{r_0}-(\frac{r_0}{w})]} \\ &= -U\frac{2}{\ln\{1.5\}}\frac{1}{z} \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Das Potenzial lässt sich als Überlagerung des Potenzials der Ladung und Ihrer Spiegelladung im entsprechenden Fall berechnen. Das Potenzial einer Punktladung lautet:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}\,|\vec{r}-\vec{r}'|} \tag{1}$$

Hier lässt sich das Problem auf die z-Achse beschränken und für große Werte der Abstand entwicken:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}\frac{1}{z-z'} \qquad (2) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}\left(\frac{1}{z}+\frac{z'\cdot z}{z^3}\right) \quad . \qquad (3) \end{aligned}$$

Im ersten Fall ist die Spiegelladung gleich weit von der leitenden Platte entfernt, wie die Originalladung. Die besitzt gleiche Größe, jedoch umgekehrtes Vorzeichen. Somit lautet die Überlagerung:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}\frac{1}{z-a}+\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}\frac{1}{z-(-a)} \qquad (4) \\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}\left(\frac{1}{z}+\frac{a\cdot z}{z^3}-\frac{1}{z}-\frac{-a\cdot z}{z^3}\right) \qquad (5) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}\frac{2a}{z^2} \quad . \qquad (6) \end{aligned}$$

Um die Randbedingungen der Kugel zu erfüllen, muss sich bei $-z_2$ eine Spiegelladung Q_2 befinden. Für diese gilt laut Skript:

$$2a\cdot z_2 = a^2 \tag{7}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{a}{2} && (8)\\ \text{und} & && (9)\\ Q_2 &= -\frac{Q\cdot a}{2a} = -\frac{Q}{2} && (10)\end{aligned}$$

Das Potenzial berechnet sich dann also nach:

$$\begin{aligned} V &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\rm r}}\frac{1}{z-a} + \frac{-Q/2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\rm r}}\frac{1}{z-(-a/2)} && (11)\\ &\approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\rm r}}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{2}\frac{1}{z-(-a/2)}\right) && (12)\\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\rm r}}\left(\frac{1}{z} + \frac{a\cdot z}{z^3} - \frac{1}{2z} - \frac{-a/2\cdot z}{2z^3}\right) && (13)\\ &\approx \frac{Q}{8\pi\epsilon_0\epsilon_{\rm r}}\frac{1}{z} \quad . && (14)\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Die Reflexion der einfallenden Welle erzeugt die Welle:

$$E_{\rm r1} = E_{\rm i} r_{12} \tag{15}$$

Die transmittierte Welle wird durch das Medium mit n_2 propagiert und an der nächsten Grenzfläche wiederum reflektiert. Nach einer weiteren Propagation trägt der davon durch die erste Grenze transmittierte Teil wiederum zur Reflexion bei:

$$E_{\rm r2} = E_{\rm i} t_{12} e^{ik_2 d} r_{21} e^{ik_2 d} t_{21} \tag{16}$$

Der reflektierte Teil wird wiederum zweimal propagiert, reflektiert und trägt schließlich nach der Transmission wieder zu $E_{\rm r3}$ bei.

$$E_{\rm r3} = E_{\rm i} t_{12} e^{i2k_2 d} r_{21} r_{21} \cdot e^{i2k_2 d} r_{21} t_{21} \tag{17}$$

Und wiederum wird der reflektierte Teil zweimal propagiert, reflektiert und trägt schließlich nach der Transmission zu $E_{\rm r4}$ bei:

$$E_{\rm r4} = E_{\rm i} t_{12} e^{i2k_2 d} r_{21} r_{21} \cdot e^{i2k_2 d} r_{21} r_{21} \cdot e^{i2k_2 d} r_{21} t_{21} \tag{18}$$

usw.!
Es gilt also:

$$E_\mathrm{r} = E_\mathrm{i}\left(r_{12} + t_{12}e^{i2k_2d}r_{21}t_{21}\sum_{l=0}^{\infty}\left(e^{i2k_2d}r_{21}^2\right)^l\right) \tag{19}$$

Für die Wellenzahlen gilt:

$$\begin{aligned}
k_2 &= n_2k = \frac{n_2}{n_1}k_1 && (20)\\
k &= \frac{2\pi}{\lambda} && (21)\\
k_2 &= \frac{n_2}{n_1}\frac{2\pi}{\lambda/n_1} = \frac{n_22\pi}{\lambda} && (22)\\
k_2d &= \frac{n_22\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2n_2} = \pi && (23)\\
&\text{Somit folgt :} && (24)\\
e^{i2k_2d} &= e^{i2\pi} = 1 && (25)
\end{aligned}$$

Für die Reflexions und Transmissionsfaktoren gilt:

$$\begin{aligned}
r_{12} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -r_{21} && (26)\\
t_{12} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2} && (27)\\
t_{21} &= \frac{2n_2}{n_1 + n_2} && (28)
\end{aligned}$$

Setzt man dies in die Formel für das reflektierte Feld ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
E_\mathrm{r} &= E_\mathrm{i}r_{12}\left(1 - t_{12}t_{21}\sum_{l=0}^{\infty}\left(r_{21}^2\right)^l\right) && (29)\\
&= E_\mathrm{i}r_{12}\left(1 - \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}\frac{1}{1-r_{21}^2}\right) && (30)\\
&= E_\mathrm{i}r_{12}\left(1 - \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}\frac{1}{1-\left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2}\right) && (31)\\
&= E_\mathrm{i}r_{12}\left(1 - \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}\frac{1}{\frac{(n_1+n_2)^2-(n_1-n_2)^2}{(n_1+n_2)^2}}\right) = 0 && (32)
\end{aligned}$$

Es wird also kein Licht reflektiert.

Aufgabe 7

Nach dem Faraday-Gesetz gilt bei harmonischer Zeitabhängigkeit der Felder:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \mu_\mathrm{r} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} && (33)\\
&= -i\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}\vec{H} && (34)\\
\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) &= -i\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}\nabla \times \vec{H} && (35)\\
&= \nabla\left(\nabla \circ \vec{E}\right) - \Delta\vec{E} && (36)
\end{aligned}$$

Da das Gebiet laut Aufgabe raumladungsfrei ist, gilt:

$$\nabla \circ \vec{E} = 0 \tag{37}$$

Das Ohmsche- und das modifizierte Ampéresche-Gesetz liefern:

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \sigma\vec{E} && (38)\\
\nabla \times \vec{H} &= \vec{j} \quad \text{da laut Aufgabe :} && (39)\\
\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{0} && (40)
\end{aligned}$$

Einsetzen ergibt dann die gesuchte Differentialgleichung:

$$-i\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}\vec{j} = -\frac{1}{\sigma}\Delta\vec{j} \tag{41}$$

Wegen der unendlichen Ausdehnung in y- und z-Richtung kann das Problem nur von x abhõngen. Je nach einfallender Polarisation erzeugt das elektrische Feld im Leiter einen Strom. Hier sei die z-Richtung in Richtung des E-Feldes gelegt.
Die DGL lässt sich dann vereinfacht schreiben:

$$i\omega\mu_0\mu_\mathrm{r}\sigma j_\mathrm{z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} j_\mathrm{z} \tag{42}$$

Zur Erklärung:
In Koaxialkabeln werden die Innenleiter oft als Litze (nicht als einzelner Draht) ausgeführt, wobei die einzelnen Leiter an der Oberfläche versilbert sind. Dies tut man deshalb, da bei höheren Frequenzen der Strom hauptsächlich am Rand des Leiters fließt. Durch die Versilberung wird die Leitfähigkeit an der Oberfläche verbessert. Durch das Ausführen als Litze wird die Oberfläche vergrößert, somit sinkt der Widerstand. Man

bezeichnet diese Stromverdrängung auch als Skin-Effekt. In obiger Aufgabe ergäbe ich als Lösung der DGL ein Strom, der in z-Richtung fließt und von Oberfläche in x-Richtung exponentiell abfällt.

Aufgabe 8

Die geladene Kugel kann als Punktladung der Größe Q_0 betrachtet werden. Somit gilt im Außenraum:

$$V = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} r} \tag{43}$$

$$V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} R_0} \tag{44}$$

Im Inneren ist das Potential konstant $V = V_0$.
Für die Energie(dichte) des elektrostatischen Feldes gilt:

$$w_\mathrm{el} = \frac{\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}{2}\left|\vec{E}\right|^2 \tag{45}$$

$$W_\mathrm{el} = \int\!\!\int_V\!\!\int w_\mathrm{el}\, dV \tag{46}$$

$$= \frac{\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}{2}\int\!\!\int_V\!\!\int \left|\vec{E}\right|^2 dV \tag{47}$$

$$= 4\pi\frac{\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r}}{2}\int_{R_0}^{\infty}\frac{Q_0^2}{16\pi^2\epsilon_0^2\epsilon_\mathrm{r}^2 r^4} r^2 dr \tag{48}$$

$$= \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} R_0} \tag{49}$$

$$\text{mit}: \quad Q_0 = 4\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} R_0 V_0 \tag{50}$$

$$\text{folgt}: \quad W_\mathrm{el} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} R_0 V_0^2 \tag{51}$$

Die Größe

$$\frac{\partial W_\mathrm{el}}{\partial R_0} = 2\pi\epsilon_0\epsilon_\mathrm{r} V_0^2 \tag{52}$$

lässt sich wie folgt herleiten:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad | \cdot q \tag{53}$$
$$\vec{F} = -\nabla W_{\mathrm{el}} \tag{54}$$

Da hier nur der radiale Anteil von Interesse ist, kann man dies zu

$$F_r = \frac{\partial W_{\mathrm{el}}}{\partial r} \tag{55}$$

umformen. Und stellt somit eine Kraft auf die Kugeloberfläche dar.

Aufgabe 9

Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung, des Gaußschen Gesetzes und des Ohmschen Gesetzes

$$\nabla \circ \vec{j}_{\mathrm{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0$$

$$\varrho = \nabla \circ \left(\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_{\mathrm{frei}}}{\sigma}$$

erhält man eine DGL für $\vec{j}_{\mathrm{frei}}$:

$$\nabla \circ \left(\vec{j}_{\mathrm{frei}} + \tau \frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_{\mathrm{frei}}\right) = 0$$

mit der charakteristischen Zeitkonstante des Mediums

$$\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}.$$

Randverzerrungen sollen nicht berücksichtigt werden, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0.$$

Die Materialparameter sind nur von x abhängig, ebenso wie die Stromdichte der freien Ladungsträger, die zudem keine Transversalkomponente besitzen soll:

$$\tau = \tau\{x\}$$
$$\vec{j}_{\mathrm{frei}} = j_{\mathrm{frei}}\{x, t\}\vec{e}_{\mathrm{x}}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Vorraussetzungen erhält man eine DGL für j_{frei}

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(j_{\text{frei}}\{x,t\}+\tau\{x\}\frac{\partial}{\partial t}j_{\text{frei}}\{x,t\}\right)=0.$$

Durch Integration nach x folgt

$$j_{\text{frei}}\{x,t\}+\tau\{x\}\frac{\partial}{\partial t}j_{\text{frei}}\{x,t\}=\text{const}_x=\frac{i\{t\}}{F}.$$

Die spezielle Lösung dieser inhomogene lineare DGL kann z.B. mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten bestimmt werden. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet

$$j_{\text{hom}}\{x,t\}=\mathrm{C}\exp\{-t/\tau\}.$$

Die Konstante C ersetzt man durch die Funktion $C\{t\}$ und versucht, diese so zu bestimmen, dass

$$j_{\text{frei}}\{x,t\}=C\{t\}\exp\{-t/\tau\}$$

die inhomogene DGL läßt. Setzt man diesen Ausdruck und seine Ableitung in die DGL ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{i\{t\}}{F}\frac{\exp\{t/\tau\}}{\tau},$$

bzw.

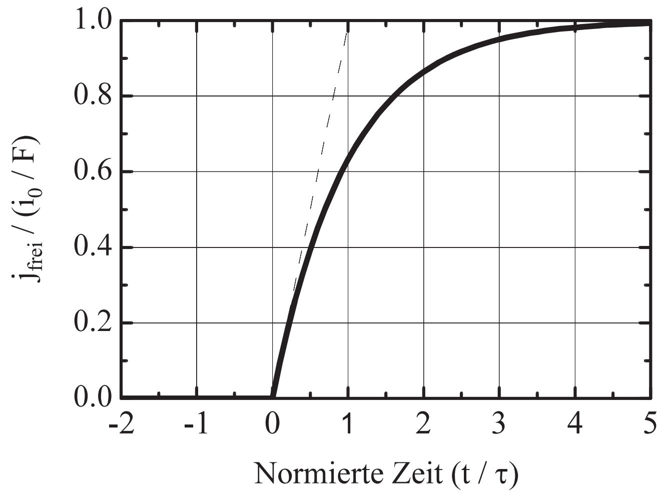
$$\begin{aligned} C\{t\} &= \int_0^t \frac{i\{\zeta\}}{F}\frac{\exp\{\zeta/\tau\}}{\tau}d\zeta + C\{t=0\} \\ &= \frac{i_0}{F}\left(\exp\{t/\tau\}-1\right)+C\{t=0\}. \end{aligned}$$

Da der Kondensator zum Zeitpunkt $t=0$ vollständig entladen ist, d.h.

$$C\{t=0\}=j_{\text{frei}}\{x,t=0\}=0$$

gilt, ergibt sich die gesuchte Stromdichte zu

$$j_{\text{frei}}\{x,t\}=\frac{i_0}{F}\left(1-\exp\{-t/\tau\}\right).$$



Aufgabe 10

Die Integralform des Gaußschen Gesetzes für die dielektrische Verschiebung lautet

$$\oiint_{S_V} \vec{D} \circ \mathrm{d}\vec{S_V} = \iiint_V \varrho\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3 r = Q_{\mathrm{frei}}.$$

Wegen der Kugelsymmetrie der Anordnung hängt die dielektrische Verschiebung nur von der Radialkomponente r (Kugelkoordinaten) ab; für S_V wird die Koordinatenoberfläche $r =$ konst. gewählt

$$\begin{aligned} \vec{D}\{\vec{r}\} &= \vec{D}\{r\} \\ \mathrm{d}\vec{S_V} &= r^2 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \vec{e}_{\mathrm{r}}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man dies beim Gaußschen Gesetz, so ergibt sich

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} D_{\mathrm{r}} r^2 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = Q$$

$$\mathbf{D}_{\mathrm{r}}\{\mathbf{r}\} = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{4\pi r^2}}.$$

Außer der Punktladung gibt es keine weiteren freien Ladungsverteilungen, d.h. für $\vec{r} \neq \vec{0}$ gilt

$$\nabla \circ \vec{D} = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 D_{\mathrm{r}}\right)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi}D_{\varphi}}_{=0} + \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\{\theta\} D_{\theta}\right) = 0,$$

bzw.

$$\mathbf{D}_{\theta}\{\mathbf{r}\} = \mathbf{0}.$$

Das elektrische Feld ist wirbelfrei, da kein Magnetfeld existiert. Innerhalb bzw. außerhalb der Kugel ist die Dielektrizitätskonstante ortsunabhängig, d.h. dort ist auch die dielektrische Verschiebung frei von Wirbeln

$$\nabla \times \vec{D} = \frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\sin\{\theta\} D_{\varphi}\right)\right]\vec{e}_{\mathrm{r}} + [\cdots]\,\vec{e}_{\theta} + [\cdots]\,\vec{e}_{\varphi} = \vec{0}.$$

Da die dielektrische Verschiebung nur von r abhängt, kann aus obiger Gleichung gefolgert werden, dass ihre Azimutalkomponente verschwindet

$$\mathbf{D}_{\varphi}\{\mathbf{r}\} = \mathbf{0}.$$

Innerhalb der Kugel gilt also

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{D} & = & \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{E} & = & \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ V & = & \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + \mathrm{C}_1 \end{array}\right\} 0 < r < r_0$$

und außerhalb der Kugel gilt

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{D} & = & \frac{Q}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ \vec{E} & = & \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r} \\ V & = & \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \mathrm{C}_2 \end{array}\right\} r \geq r_0.$$

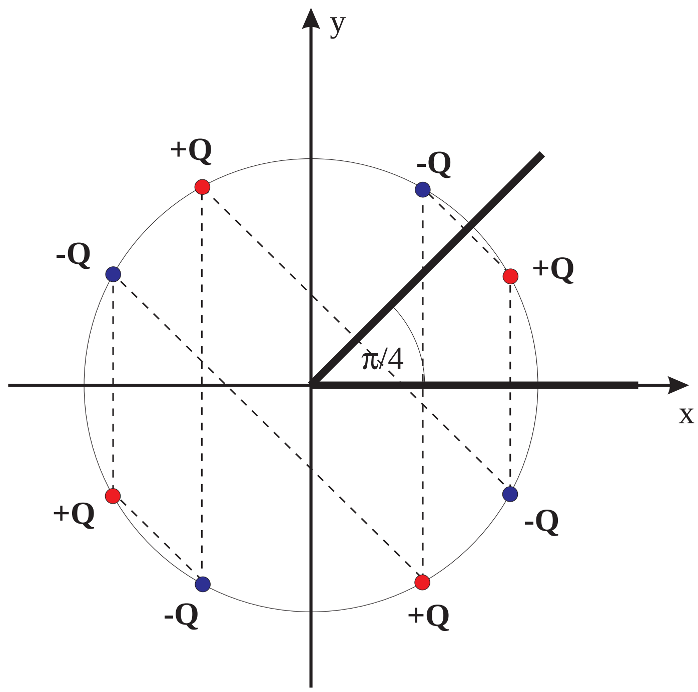
Das Potenzial V soll im Unendlichen Null sein, d.h.

$$\mathrm{C}_2 = 0,$$

und muss an der Grenzfläche $r = r_0$ stetig sein, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} + \mathrm{C}_1 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \\ \mathrm{C}_1 &= \frac{Q\,(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11



Aufgabe 12

Das Rohr hat seine Achse auf der z-Achse, es gilt:

$$\vec{j} = \frac{I\vec{e}_{\mathrm{z}}}{\pi\left(b^2 - a^2\right)} \begin{cases} 1 & a \leq \rho \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Wegen der Rotationssysmmetrie und Translationssymmetrie der Anordnung um bzw. entlang der z-Achse beschränkt sich die Ortsabhängigkeit der magnetischen Feldstärke auf die Radialkoordinate ρ (Zylinderkoordinaten).

$$\vec{H} = H_\phi\left\{\rho\right\}\vec{e}_\phi + H_\rho\left\{\rho\right\}\vec{e}_\rho + H_{\mathrm{z}}\left\{\rho\right\}\vec{e}_{\mathrm{z}}.$$

Das Magnetfeld ist stets frei von Quellen. Da hier keine magnetisierbare Materie vorliegt, gilt dies auch für die magnetische Feldstärke

$$\nabla \circ \vec{H} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho H_\rho\right) = 0.$$

Hieraus folgt

$$H_\rho\{\rho\} = \frac{\mathrm{C}}{\rho}.$$

Die Konstante C ist Null zu setzen, da sonst das Feld auf der Achse des Zylinder divergieren würde, d.h.

$$H_\rho\{\rho\} = 0.$$

Im gesamten Raum gilt das Ampèresche Gesetz

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}$$

$$\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho H_\phi\right)\right]\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}} + \left[\frac{\partial}{\partial\rho}H_{\mathrm{z}}\right]\vec{\mathrm{e}}_\phi = \frac{I\vec{e}_z}{\pi\left(b^2 - a^2\right)}\begin{cases} 1 & a \leq \rho \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man sieht, dass die Longitudinalkomponente des Feldes keine Ortsabhängigkeit ausweist

$$H_{\mathrm{z}}\{\rho\} = \mathrm{const}_\rho,$$

Mit Hilfe der Integralform des Ampèreschen Gesetzes

$$\oint\limits_C \vec{H}\mathrm{d}\vec{l} = \iint\limits_{S_C} \vec{j}\;\mathrm{d}\vec{S}_{\mathrm{C}},$$

wobei C ein Kreis mit Mittelpunkt auf der z-Achse ist, der die Fläche S_C umschließt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{l} &= \rho\mathrm{d}\phi'\vec{\mathrm{e}}_\phi \\ \mathrm{d}\vec{S}_{\mathrm{C}} &= \rho'\mathrm{d}\rho'\mathrm{d}\phi'\vec{\mathrm{e}}_{\mathrm{z}}, \end{aligned}$$

kann die Azimutalkomponente der magnetische Feldstärke mit folgender Integralgleichung bestimmt werden:

$$\int\limits_0^{2\pi} H_\phi\rho\mathrm{d}\phi' = \int\limits_0^{\rho}\int\limits_0^{2\pi} \vec{j}\circ\vec{e}_{\mathrm{z}}\rho'\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}\rho'.$$

Es folgt:

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho}\begin{cases} 0 & \rho < a \\ \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2} & a \leq \rho \leq b \\ 1 & \rho > b \end{cases}$$