Elektromagnetische Felder und Wellen

Klausur Frühjahr 2001

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Bei einem ebenen Plattenkondensator habe jede der parallel im Abstand d angeordneten Metallplatten die Fläche A. Eine der Platten liege in der Ebene $x = 0$. Der Zwischenraum ist mit einem leitfähigen Dielektrikum gefüllt, für welches gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon &= const \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_\mathrm{x} \cdot x \end{aligned}$$

Der Kondensator ist an eine Konstantstromquelle mit $i\{t\} = i_0$ angeschlossen. Berechnen Sie die Potenzialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten!

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Eine mit der Volumenladungsdichte ϱ_V homogen geladene Kugel vom Radius R_K befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. An der Stelle $\vec{r}_\mathrm{H} = (x_\mathrm{H}, y_\mathrm{H}, z_\mathrm{H})^T$ innerhalb dieser Kugel befinde sich ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius R_H, so dass die Oberfläche der äußeren Kugel nicht verletzt wird. Berechnen Sie die Kraft auf eine Ladung Q, die sich in großem Abstand r von dieser Anordnung befindet!

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist ein ebener Plattenkondensator aus zwei parallelen Metallplatten der Fläche A, welche sich bei $x = 0$ bzw. $x = d$ befinden. Der Zwischenraum ist mit einem leitfähigen Dielektrikum mit ortsabhängigen Materialparametern $\epsilon\{x\}$ und $\sigma\{x\}$ gefüllt. Nehmen Sie eine zeitabhängige Spannung an den Kondensatorplatten an. Leiten Sie unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung und des mikroskopischen ohmschen Gesetzes eine Differenzialgleichung für den zeitlichen Verlauf des elektrischen Feldes $\vec{E}\{\vec{r}, t\} = E\{\vec{r}, t\}\vec{e}_\mathrm{x}$ im Inneren des Kondensators her! Welche Information müsste gegeben sein, damit Sie diese DGL lösen können?

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Eine leitende Hohlkugel vom Radius R ist halb mit einem nichtleitenden Dielektrikum (ϵ, μ) gefüllt. Ihr Mittelpunkt befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. Die Grenzfläche des Dielektrikums befinde sich bei $z = 0$, das Dielektrikum füllt den Raum für $z < 0$. Für $z > 0$ ist die Kugel leer. Eine Punktladung Q_1 befinde sich bei $z_1 = R/3$ auf der positiven z-Achse innerhalb der Kugel. Skizzieren Sie die Anordung! Zeichen Sie alle Spiegelladungen ein, die notwendig sind, um das Feld innerhalb der Kugel zu berechnen und berechnen Sie das Feld im leeren Teil der Kugel. (Hinweis: Führen Sie das Problem auf zwei bekannte Teilprobleme zurück.) Existiert ein elektrisches Feld außerhalb der Kugel? Begründen Sie ihre Ansicht!

Aufgabe 5 (3 Punkte)

In einem verlustlosen Medium der Brechzahl n breite sich eine ebene Welle gemäß $\exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r}-\omega t)\}$ aus. Für den Wellenzahlvektor soll $\vec{k} = (a\cdot\pi/2)\vec{e}_{\mathrm{x}}+b\vec{e}_{\mathrm{y}}$ gelten. Berechnen Sie b als Funktion von a und n.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

In der Vorlesung wurde die Dispersionsrelation für ebene Wellen hergeleitet. Wie lautet die (ortsabhängige) Dispersionsrelation für die Hermite-Gauß-Welle

$$E = E_0 \left(1 - i\frac{z - z_0}{p^2 k}\right) \exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\} \exp\left\{i[k(z - z_0) - \omega t]\right\} \quad ,$$

die bei $z = z_0$ startet in einem quellfreien Raum?

Hinweis: Verwenden Sie die Schreibweise $E = E_0 XZT$ mit $X = \exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\}$, $Z = \left(1 - i\frac{z-z_0}{p^2k}\right) \exp\left\{ik(z - z_0)\right\}$ und $T = \exp\{-i\omega t\}$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Eine Blochwelle wird durch den Ansatz $E = u\{x, y, z\} \exp\{i[k(z - z_0) - \omega t]\}$ beschrieben. Welche Differentialgleichung muss $u\{\vec{r}\}$ in einem quellenfreien Raumgebiet erfüllen?

Aufgabe 8 (15 Punkte)

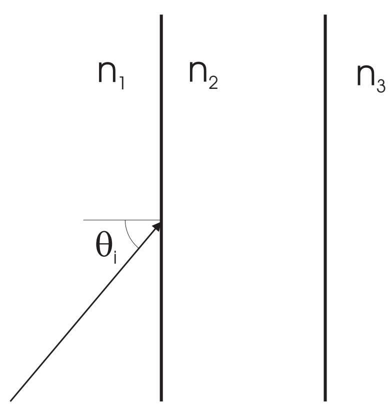
Eine ebene TM Welle fällt aus der negativen z- Halbebene auf die Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei unmagnetischen Medien. Die Welle breitet sich unter den Winkeln $\theta_1 = \pi/3$ und $\phi_1 = \pi/4$, gemessen gegen die z- und x- Achse wie bei räumlichen Polarkoordinaten üblich, aus. Im Bereich $z < 0$ ist die Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \epsilon_1$, im Bereich $z \geq 0$ $\epsilon = \epsilon_2$. Für die Welle tritt keine Reflexion an der Grenzfläche auf. Wie groß ist ϵ_2? Geben Sie die Komponenten des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle als Funktion von ϵ_1, θ_1 und ϕ_1 an, wobei θ_1 und ϕ_1 durch die Zahlenwerte ersetzt und die Winkelfunktionen ausgerechnet werden sollen. Die Vakuumwellenzahl sei k_0.

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Ein Strom I durchfließt eine quadratische Leiterschleife mit der Kantenlänge d. Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ im Raum außerhalb der Leiterschleife. Zuleitungen sollen nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Ein Lichtstrahl trifft unter einem Winkel θ_i auf eine Grenzfläche (siehe Abbildung).



Berechnen Sie die Wellenvektoren $\vec{k}_2$ und $\vec{k}_3$ in den Bereichen 2 und 3. Wie groß ist $\Delta\vec{k} = \vec{k}_3 - \vec{k}_2$ für $n_3 = n_1$? Führen Sie eine Fallunterscheidung für $\sin\{\theta_i\} > \frac{n_2}{n_1}$ und $\sin\{\theta_i\} < \frac{n_2}{n_1}$ durch !

Aufgabe 11 (12 Punkte)

Im freien Raum fließt die Stromdichte $\vec{j} = I\sin\{\omega t\}\delta\{x\}\delta\{z\}|y|\exp\{-|y|\}\vec{e_{\mathrm{y}}}$. Geben Sie die y- Komponente des magnetischen Vektorpotenzials $\vec{A}$ an. Gehen Sie dabei von der allgemeinen Lösung der inhomogenen Wellengleichung für $\vec{A}$ in Lorentz- Eichung aus. Die Lösung des Integrals ist nur im Ursprung analytisch einfach ausrechenbar. Wie lautet das Ergebnis?

Aufgabe 12 (7 Punkte)

Eine Stromschleife führt den Strom I und besitzt die Paramterdarstellung
$\vec{r}\{t\} = r_0(\cos\{t\}\vec{e}_{\mathrm{x}} + \sin\{t\}\vec{e}_{\mathrm{y}} + 2\sin\{\frac{t}{2}\}\vec{e}_{\mathrm{z}})$ mit $-2\pi \leq t \leq 2\pi$
Wie groß ist das Dipolmoment $\vec{m}$?