Aufgabe 1

Bei einem ebenen Plattenkondensator habe jede der parallel im Abstand d angeordneten Metallplatten die Fläche A. Eine der Platten liege in der Ebene $x = 0$. Der Zwischenraum ist mit einem leitfähigen Dielektrikum gefüllt, für welches gilt:

$$\begin{aligned} \epsilon &= const \\ \sigma &= \sigma_0 + \sigma_\mathrm{x} \cdot x \end{aligned}$$

Der Kondensator ist an eine Konstantstromquelle mit $i\{t\} = i_0$ angeschlossen. Berechnen Sie die Potenzialdifferenz zwischen den Kondensatorplatten!

Lösung

Auf die Kondensatorplatten fließt der Strom $i(t) = i_0$, der sich dort auf die Fläche A verteilt und somit die Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{i_0}{A}\vec{e}_\mathrm{x} \tag{1}$$

hervorruft.

Mit dem ohmschen Gesetz folgt:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma\vec{E} \\ \frac{i_0}{A}\vec{e}_\mathrm{x} &= (\sigma_0 + \sigma_\mathrm{x} \cdot x)\,\vec{E} \\ \vec{E} &= \frac{i_0}{A}\frac{1}{\sigma_0 + \sigma_\mathrm{x} \cdot x}\vec{e}_\mathrm{x} \end{aligned}$$

Die Potenzialdifferenz ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} U &= \int\limits_0^d E_\mathrm{x}\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^d \frac{i_0}{A}\frac{1}{\sigma_0 + \sigma_\mathrm{x} \cdot x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{i_0}{A\sigma_\mathrm{x}} \ln\left\{1 + \frac{\sigma_\mathrm{x} d}{\sigma_0}\right\} \end{aligned}$$

Es handelt sich eigentlich also gar nicht um einen Kondensator, sondern um einen Widerstand mit “Innenleben”.

Aufgabe 2

Eine mit der Volumenladungsdichte ϱ_{V} homogen geladene Kugel vom Radius R_{K} befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. An der Stelle $\vec{r}_{\mathrm{H}} = (x_{\mathrm{H}}, y_{\mathrm{H}}, z_{\mathrm{H}})^T$ innerhalb dieser Kugel befinde sich ein kugelförmiger Hohlraum mit Radius R_{H}, so dass die Oberfläche der äußeren Kugel nicht verletzt wird. Berechnen Sie die Kraft auf eine Ladung Q, die sich in großem Abstand r von dieser Anordnung befindet!

Lösung

Für große Abstände r lässt sich die gegebene Ladungsanordung als Punktladung ansehen. Für deren Ladung Q_K gilt:

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{K}} &= \varrho_{\mathrm{V}} \cdot (V_{\mathrm{K}} - V_{\mathrm{H}}) \\ &= \varrho_{\mathrm{V}} \cdot \frac{4}{3}\pi \left(R_{\mathrm{K}}^3 - R_{\mathrm{H}}^3\right) \end{aligned}$$

Nach dem Coulombschen Gesetz ist dann die Kraft auf die Ladung Q im Abstand r:

$$F = \frac{Q \cdot Q_{\mathrm{K}}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{Q \cdot \varrho_{\mathrm{V}}}{3\epsilon\epsilon_0 r^2} \left(R_{\mathrm{K}}^3 - R_{\mathrm{H}}^3\right) \tag{2}$$

Aufgabe 3

Gegeben ist ein ebener Plattenkondensator aus zwei parallelen Metallplatten der Fläche A, welche sich bei $x = 0$ bzw. $x = d$ befinden. Der Zwischenraum ist mit einem leitfähigen Dielektrikum mit ortsabhängigen Materialparametern $\epsilon\{x\}$ und $\sigma\{x\}$ gefüllt. Nehmen Sie eine zeitabhängige Spannung an den Kondensatorplatten an. Leiten Sie unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung und des mikroskopischen ohmschen Gesetzes eine Differenzialgleichung für den zeitlichen Verlauf des elektrischen Feldes $\vec{E}\{\vec{r}, t\} = E\{\vec{r}, t\}\vec{e}_{\mathrm{x}}$ im Inneren des Kondensators her! Welche Information müsste gegeben sein, damit Sie diese DGL lösen können?

Lösung

Diese Aufgabe lässt sich analog zu Aufgabe 9 der letzten Klausur lösen. Wieder gelten die Kontinuitätsgleichung, das Gaußsche und das Ohmsche Gesetz:

$$\nabla \circ \vec{j}_{\text{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0$$
$$\varrho = \nabla \circ \left(\epsilon\epsilon_0 \vec{E}\right)$$
$$\vec{E} = \frac{\vec{j}_{\text{frei}}}{\sigma}$$

Man erhält hier die DGL:

$$\nabla \circ \left(\sigma\vec{E}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \circ \left(\epsilon\epsilon_0 \vec{E}\right)\right) = 0 \tag{3}$$

Wiederum lassen sich die Orts- und die Zeitableitung vertauschen.

$$\nabla \circ \left(\sigma\vec{E} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) = 0 \tag{4}$$

Das elektrische Feld kann als $\vec{E} = E_{\text{x}} \cdot \vec{e}_{\text{x}}$ geschrieben werden. Somit lässt sich die eindimensionale DGL im Ortsraum lösen:

$$\sigma E_{\text{x}} + \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_{\text{x}} = j_{\text{x}0}\left\{t\right\} \tag{5}$$

Da die Rand-/Anfangsbedingung für $\vec{E}\left\{t\right\}$ nicht gegeben ist kann man diese DGL nicht mehr lösen. In Aufgabe 9 aus der Klausur im Herbst 2000 war der zeitliche Verlauf von i dagegen bekannt.

Aufgabe 4

Eine leitende Hohlkugel vom Radius R ist halb mit einem nichtleitenden Dielektrikum (ϵ, μ) gefüllt. Ihr Mittelpunkt befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. Die Grenzfläche des Dielektrikums befinde sich bei $z = 0$, das Dielektrikum füllt den Raum für $z < 0$. Für $z > 0$ ist die Kugel leer. Eine Punktladung Q_1 befinde sich bei $z_1 = R/3$ auf der positiven z-Achse innerhalb der Kugel. Skizzieren Sie die Anordung! Zeichen Sie alle Spiegelladungen ein, die notwendig sind, um das Feld innerhalb der Kugel zu berechnen und berechnen Sie das Feld im leeren Teil der Kugel. (Hinweis: Führen Sie das Problem auf zwei bekannte Teilprobleme zurück.) Existiert ein elektrisches Feld außerhalb der Kugel? Begründen Sie ihre Ansicht!

Lösung

Erstes Teilproblem: Um eine Kugel als Äquipotenzialfläche zu erhalten muss man laut Skript eine Spiegelladung Q_2 bei

$$z_2 = \frac{R^2}{z_1} = 3 \cdot R \tag{6}$$

anbringen. Diese hat die Größe

$$Q_2 = -Q_1 \frac{R}{z_1} = -3Q_1 \tag{7}$$

Zweites Teilproblem: Die Spiegelladung an einer dielektrischen Grenzfläche wurde in den Übungen behandelt. Es gilt:

$$\begin{aligned} z_3 = -z_1 &= -\frac{R}{3} \\ Q_3 &= -Q_1 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \end{aligned}$$

Zurück zum ersten Teilproblem: Selbstverständlich muss auch für die Spiegelladung Q_3 die Bedingung der Kugel erfüllt werden. Dazu ist eine weitere Spiegelladung Q_4 notwendig:

$$\begin{aligned} z_4 &= \frac{R^2}{z_3} = -3 \cdot R \\ Q_4 = -Q_3 \frac{R}{z_3} &= 3 \cdot Q_1 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \end{aligned}$$

Feldberechnung: Das Feld im leeren Teil der Kugel ergibt sich durch Aufsummation der Feldkomponenten aller 4 Ladungen:

$$\vec{E} = \sum_{l=1}^{4} \frac{Q_l}{|\vec{r} - \vec{r}_l|^3} (\vec{r} - \vec{r}_l) \tag{8}$$

Im Raum außerhalb der Kugel existiert ebenfalls ein Feld, denn Oberflächenladungen, die durch die innen eingebrachte Ladung induziert werden, können nicht abfließen. Sie sind vielmehr die Senken/Quellen der Feldlinien im Außenraum.

Aufgabe 5

In einem verlustlosen Medium der Brechzahl n breite sich eine ebene Welle gemäß $\exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r}-\omega t)\}$ aus. Für den Wellenzahlvektor soll $\vec{k}=(a\cdot\pi/2)\vec{e}_{\mathrm{x}}+b\vec{e}_{\mathrm{y}}$ gelten. Berechnen Sie b als Funktion von a und n.

Lösung

Die Dispersionsrelation der ebenen Welle lautet

$$\|\vec{k}\|^2=\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2+b^2=\left(\frac{n\omega}{c_0}\right)^2 \quad .$$

Nach umstellen resultiert also der gesuchte Zusammenhang

$$b=\begin{cases}\sqrt{\left(\frac{n\omega}{c_0}\right)^2-\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2} & \text{für}\,\frac{n\omega}{c_0}\geq\frac{a\pi}{2}\\ i\sqrt{\left(\frac{a\pi}{2}\right)^2-\left(\frac{n\omega}{c_0}\right)^2} & \text{für}\,\frac{n\omega}{c_0}<\frac{a\pi}{2}\end{cases} \quad .$$

Aufgabe 6

In der Vorlesung wurde die Dispersionsrelation für ebene Wellen hergeleitet. Wie lautet die (ortsabhängige) Dispersionsrelation für die Hermite-Gauß-Welle

$$E=E_0\left(1-i\frac{z-z_0}{p^2k}\right)\exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\}\exp\left\{i[k(z-z_0)-\omega t]\right\} \quad ,$$

die bei $z=z_0$ startet in einem quellfreien Raum?

Hinweis: Verwenden Sie die Schreibweise $E=E_0XZT$ mit $X=\exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\}$, $Z=\left(1-i\frac{z-z_0}{p^2k}\right)\exp\left\{ik(z-z_0)\right\}$ und $T=\exp\{-i\omega t\}$.

Lösung

Die Dispersionsrelation geht aus der (skalaren) Wellengleichung hervor. Sie lautet

$$\Delta E-\left(\frac{1}{c}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}E=0 \quad .$$

Aus der Zeitableitung resultiert

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E=E_0XZ\frac{\partial^2}{\partial t^2}T=-\omega^2E$$

und somit

$$\Delta E + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = 0 \quad .$$

Nach Einsetzen von E und Anwenden des Laplace Operators ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} E + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E + \frac{\partial^2}{\partial z^2} E \\
&= E\left[\frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2} X + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z\right] \\
&= -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E
\end{aligned}$$

Die zweifache Ableitung von X nach x ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} X &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{p^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\}\right) \\
&= \left(\frac{1}{p^2} - \left(\frac{x}{p^2}\right)^2\right)\exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\} \\
&= \frac{1}{p^2}\left[\left(\frac{x}{p}\right)^2 - 1\right] X
\end{aligned}$$

und die zweite Ableitung von Z nach z

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-\frac{i}{kp^2} + ik + \frac{z - z_0}{p^2}\right)\exp\left\{ik(z - z_0)\right\}\right] \\
&= \left(\frac{2}{p^2} - k^2 + \frac{ik(z - z_0)}{p^2}\right)\exp\left\{ik(z - z_0)\right\} \\
&= -k^2\left(1 - \frac{2}{(kp)^2 - ik(z - z_0)}\right) Z \quad .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Dispersionsrelation

$$\frac{1}{p^2}\left[\left(\frac{x}{p}\right)^2 - 1\right] + \frac{2k^2}{(kp)^2 - ik(z - z_0)} = k^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \quad .$$

Aufgabe 7

Eine Blochwelle wird durch den Ansatz $E = u\{x, y, z\}\exp\{i[k(z - z_0) - \omega t]\}$ beschrieben. Welche Differentialgleichung muss $u\{\vec{r}\}$ in einem quellenfreien Raumgebiet erfüllen?

Lösung

Das elektrische Feld muss die Wellengleichung

$$\Delta E + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E = 0$$

erfüllen. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(\Delta_{\mathrm{t}} u + \frac{\partial}{\partial z}\left(iku + \frac{\partial}{\partial z} u\right)\right) \exp\{i[k(z - z_0) - \omega t]\} \\ &= \left(\Delta u + 2ik\frac{\partial}{\partial z} - k^2 u\right) \exp\{i[k(z - z_0) - \omega t]\}\end{aligned}$$

und somit

$$\Delta u + 2ik\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

Aufgabe 8

Eine ebene TM Welle fällt aus der negativen z- Halbebene auf die Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei unmagnetischen Medien. Die Welle breitet sich unter den Winkeln $\theta_1 = \pi/3$ und $\phi_1 = \pi/4$, gemessen gegen die z- und x- Achse wie bei räumlichen Polarkoordinaten üblich, aus. Im Bereich $z < 0$ ist die Dielektrizitätskonstante $\epsilon = \epsilon_1$, im Bereich $z \geq 0$ $\epsilon = \epsilon_2$. Für die Welle tritt keine Reflexion an der Grenzfläche auf. Wie groß ist ϵ_2? Geben Sie die Komponenten des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle als Funktion von ϵ_1, θ_1 und ϕ_1 an, wobei θ_1 und ϕ_1 durch die Zahlenwerte ersetzt und die Winkelfunktionen ausgerechnet werden sollen. Die Vakuumwellenzahl sei k_0.

Lösung

Eine TM- Welle, die bei schrägem Einfall auf eine Grenzfläche nicht reflektiert wird, fällt unter dem Brewsterwinkel ein. Die Flächennormale ist $\vec{n} = \vec{e}_{\mathrm{z}}$,so dass direkt der Winkel θ_1 den Einfallswinkel angibt. Es gilt

$$\tan\{\theta_{\mathrm{iB}}\} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{3} \quad ,$$

also

$$\epsilon_2 = 3\epsilon_1 \quad .$$

Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle ist

$$\vec{k}_\mathrm{i} = k_1\left(\sin\{\theta_1\}\cos\{\phi_1\}\vec{e}_\mathrm{x} + \sin\{\theta_1\}\sin\{\phi_1\}\vec{e}_\mathrm{y} + \cos\{\theta_1\}\vec{e}_\mathrm{z}\right)$$

mit

$$k_1 = n_1 k_0 = \sqrt{\epsilon_1}k_0 \quad .$$

Für die transmittierte Welle ergibt sich dann

$$\vec{k}_\mathrm{t} = k_1\left(\sin\{\theta_1\}\cos\{\phi_1\}\vec{e}_\mathrm{x} + \sin\{\theta_1\}\sin\{\phi_1\}\vec{e}_\mathrm{y}\right) + (\vec{k}_\mathrm{t}\circ\vec{e}_\mathrm{z})\vec{e}_\mathrm{z}$$

mit

$$\|\vec{k}_\mathrm{t}\| = k_2 = n_2 k_0 = \sqrt{\epsilon_2}k_0 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}k_1 \quad .$$

und

$$\begin{aligned}\vec{k}_\mathrm{t}\circ\vec{e}_\mathrm{z} &= \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + (\vec{k}_\mathrm{i}\circ\vec{e}_\mathrm{z})^2}\\ &= \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + k_1^2\cos^2\{\theta_1\}}\\ &= k_1\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 + \cos^2\{\theta_1\}}\\ &= k_1\frac{1}{2}\sqrt{7} \quad .\end{aligned}$$

Mit $\sin\{\theta_1\} = \sqrt{3}/2$, $\cos\{\theta_1\} = 1/2$ und $\sin\{\phi_1\} = \cos\{\phi_1\} = 1/\sqrt{2}$ resultiert

$$\vec{k}_\mathrm{t} = \frac{k_1}{4}(\sqrt{6}\vec{e}_\mathrm{x} + \sqrt{6}\vec{e}_\mathrm{y} + 6\vec{e}_\mathrm{z})$$

Aufgabe 9

Ein Strom I durchfließt eine quadratische Leiterschleife mit der Kantenlänge d. Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ im Raum außerhalb der Leiterschleife. Zuleitungen sollen nicht berücksichtigt werden.

Lösung

Das Vektorpotenzial $\vec{A}$ außerhalb einer räumlich begrenzten Stromverteilung lautet

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \qquad .$$

Für eine ebene Stromschleife gilt

$$|\vec{m}| = |I|F \qquad \text{mit} \quad F = d^2$$

Wählt man die Lage der Stromschleife o.B.d.A. in der xy-Ebene und lässt den Strom im mathematisch positiven Sinn fließen, dann gilt

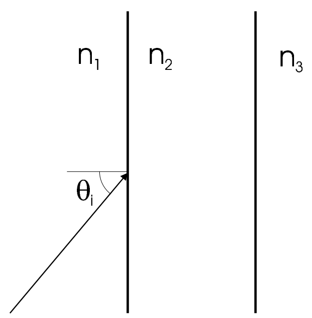
$$\vec{m} = Id^2\vec{e}_\mathrm{z} \qquad .$$

Eingesetzt mit Auswertung des Vektorprodukts ergibt sich

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0 d^2 I}{4\pi} \frac{x\vec{e}_\mathrm{y} - y\vec{e}_\mathrm{x}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad .$$

Aufgabe 10

Ein Lichtstrahl trifft unter einem Winkel θ_i auf eine Grenzfläche (siehe Abbildung).



Berechnen Sie die Wellenvektoren $\vec{k}_2$ und $\vec{k}_3$ in den Bereichen 2 und 3. Wie groß ist $\Delta\vec{k} = \vec{k}_3 - \vec{k}_2$ für $n_3 = n_1$? Führen Sie eine Fallunterscheidung für $\sin\{\theta_i\} > \frac{n_2}{n_1}$ und $\sin\{\theta_i\} < \frac{n_2}{n_1}$ durch !

Lösung

Es ist günstig ein Koordinatensystem $(\vec{n}, \vec{e}_\mathrm{t}, \vec{e}_\mathrm{l})$ so zu wählen, dass der Basisvektor $\vec{n}$ senkrecht zu den Grenzflächen steht und $\vec{k}_1$ keine Komponente in $\vec{e}_\mathrm{l}$- Richtung hat. Der $\vec{k}$-Vektor im Bereich 1 hat dann die Darstellung

$$\vec{k}_1 = k_{\|,1}\vec{e}_\mathrm{t} + k_{\perp,1}\vec{n} = k_0 n_1 \left(\sin\{\theta_i\}\vec{e}_\mathrm{t} + \cos\{\theta_i\}\vec{n}\right) \quad ,$$

wobei $k_\|$ die Tangentialkomponente und $k_\perp$ die Normalkomponente des Wellenzahlvektors $\vec{k}$ bezüglich einer der oben beschriebenen Basis bezeichnet. Die Tangentialkomponente ist an der Grenzfläche stetig. Somit gilt:

$$k_{\|,1} = k_{\|,2} = k_{\|,3} \quad .$$

Es gilt mit Bereichsindex $j = 2, 3$

$$k_{\perp,j} = \sqrt{\|\vec{k}_j\|^2 - k_{\|,j}^2}$$

und damit

$$\vec{k}_j = k_0 \left(n_1 \sin\{\theta_i\}\vec{e}_\mathrm{t} + \sqrt{n_j^2 - n_1^2\sin^2\{\theta_i\}}\vec{n}\right) \quad .$$

$\Delta\vec{k} = \vec{k}_3 - \vec{k}_2$ hat damit nur noch eine Komponente in $\vec{n}$- Richtung mit der Größe

$$\vec{n} \circ \Delta\vec{k} = k_0 \left(n_1 \cos\theta_i - \begin{cases} i\sqrt{n_1^2\sin^2\{\theta_i\} - n_2^2} & \text{für} \sin\{\theta_i\} > n_2/n_1 \\ \sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\{\theta_i\}} & \text{für} \sin\{\theta_i\} < n_2/n_1 \end{cases}\right) \quad .$$

Aufgabe 11

Im freien Raum fließt die Stromdichte $\vec{j} = I\sin\{\omega t\}\delta\{x\}\delta\{z\}|y|\exp\{-|y|\}\vec{e_\mathrm{y}}$. Geben Sie die y- Komponente des magnetischen Vektorpotenzials $\vec{A}$ an. Gehen Sie dabei von der allgemeinen Lösung der inhomogenen Wellengleichung für $\vec{A}$ in Lorentz- Eichung aus. Die

Lösung des Integrals ist nur im Ursprung analytisch einfach ausrechenbar. Wie lautet das Ergebnis?

Lösung

Die Wellengleichung für das Vektorpotenzial lautet in Lorentz-Eichung

$$\Delta\vec{A} - \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j} \quad .$$

Dies ist eine inhomogene Wellengleichung. Im Script wird die Lösung für

$$\Delta\psi\{\vec{r},t\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi\{\vec{r},t\} = -4\pi g\{\vec{r},t\} \qquad .$$

diskutiert. Die allgemeine Lösung mit der Greenschen Funktion lautet

$$\psi\{\vec{r},t\} = \iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} g\{\vec{r}',t'\}G\{\vec{r},\vec{r}',t,t'\}\mathrm{d}t'\mathrm{d}^3r' \qquad ,$$

wobei die Greenschen Funktion des freien Raums

$$G\{\vec{r},\vec{r}',t,t'\} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left\{t'-t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\}$$

ist. Mit der gegebenen Stromdichte

$$\vec{j} = I\sin\{\omega t\}\exp\{-|y|\}|y|\delta\{x\}\delta\{z\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

ist

$$g\{\vec{r},t\} = \frac{I\mu\mu_0}{4\pi}\sin\{\omega t\}\exp\{-|y|\}|y|\delta\{x\}\delta\{z\}$$

für die gesuchte Komponente A_y des Vektorpotenzials. Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_\mathrm{y}\{\vec{r}\} \quad &= \quad \frac{I\mu\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\{-|y'|\}|y'|\delta\{x'\}\delta\{z'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &\quad \cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin\{\omega t'\}\delta\left\{t'-t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\}\mathrm{d}t'\right)\mathrm{d}x'\mathrm{d}z'\mathrm{d}y' \end{aligned}$$

Nach t-Integration folgt

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{y}}\{x,y,z\} &= \frac{I\mu\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\{-|y'|\}|y'|\delta\{x'\}\delta\{z'\}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\ &\quad\cdot\sin\left\{\omega(t+\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}{c})\right\}\mathrm{d}x'\mathrm{d}z'\mathrm{d}y' \end{aligned}$$

und nach x,z-Integration vereinfacht sich der Ausdruck zu:

$$A_{\mathrm{y}}\{x,y,z\} = \frac{I\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\{-|y'|\}|y'|}{\sqrt{x^2+(y-y')^2+z^2}}\sin\left\{\omega(t+\frac{\sqrt{x^2+(y-y')^2+z^2}}{c})\right\}\mathrm{d}y'$$

Gesucht war $A_{\mathrm{y}}\{0,0,0\}$, also

$$A_{\mathrm{y}}\{0,0,0\} = \frac{I\mu\mu_0}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp\{-|y'|\}|y'|}{|y'|}\sin\left\{\omega(t+\frac{|y'|}{c})\right\}\mathrm{d}y' \qquad .$$

Nun muss man $u_j = t+\frac{(-1)^j y'}{c}$ mit $\mathrm{j}=0,1$ substituieren. Also wird

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{y}}\{0,0,0\} &= \frac{I\mu\mu_0}{4\pi}\left(\int\limits_0^{+\infty}\exp\{-y'\}\sin\left\{\omega(t+\frac{y'}{c})\right\}dy'-\right. \\ &\quad\left.-\int\limits_0^{-\infty}\exp\{y'\}\sin\left\{\omega(t-\frac{y'}{c})\right\}\mathrm{d}y'\right) \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{y}}\{0,0,0\} &= \frac{I\mu\mu_0 c}{4\pi}\left(\exp\{-ct\}\int\limits_t^{\infty}\exp\{-cu_0\}\sin\{\omega u_0\}\,\mathrm{d}u_0+\right. \\ &\quad\left.+\exp\{ct\}\int\limits_t^{\infty}\exp\{-cu_1\}\sin\{\omega u_1)\}\,\mathrm{d}u_1\right) \qquad . \end{aligned}$$

Schließlich kann man das Integral lösen:

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{y}}\{0,0,0\} &= \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi}c\cosh\{ct\}\int\limits_t^{\infty}\exp\{-cu_0\}\sin\{\omega u_0\}\,\mathrm{d}u_0 \\ &\quad\frac{\mu\mu_0 I}{2\pi}\frac{c^2\sin\{\omega t\}+c\omega\cos\{\omega t\}}{c^2+\omega^2}(1-\exp\{-2ct\}) \qquad . \end{aligned}$$

Aufgabe 12

Eine Stromschleife führt den Strom I und besitzt die Paramterdarstellung
$\vec{r}\{t\} = r_0(\cos\{t\}\vec{e}_\mathrm{x} + \sin\{t\}\vec{e}_\mathrm{y} + 2\sin\{\frac{t}{2}\}\vec{e}_\mathrm{z}) \qquad \text{mit} - 2\pi \leq t \leq 2\pi$
Wie groß ist das Dipolmoment $\vec{m}$?
Lösung
Das magnetische Moment $\vec{m}$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$\vec{m}\{\vec{r}\} = \frac{I}{2}\oint\limits_C \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{l} \quad .$$

Lösungsweg 1

Bei gegebener Parametrisierung ist das Linienelement $\vec{dl}$

$$\mathrm{d}\vec{l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\mathrm{d}t \quad ,$$

also gilt

$$\vec{m} = \frac{Ir^2}{2}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos\{t\} \\ \sin\{t\} \\ 2\sin\{t/2\} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\{t\} \\ \cos\{t\} \\ \cos\{t/2\} \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

und nach ausmultiplizieren ergibt sich

$$\vec{m} = \frac{Ir^2}{2}\int\limits_{-2\pi}^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin\{t\}\cos\{t\} - 2\sin\{t/2\}\cos\{t\} \\ -\cos\{t\}\cos\{t/2\} + 2\sin\{t/2\}\sin\{t\} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \quad .$$

Die erste Komponente gibt null, weil eine ungerade Funktion über ein symmetrisches Intervall integriert wird. Die zweite Komponente wird null, weil die Kronecker-Beziehung (im Script nur ganzzahlig, daher mit geeigneter Substitution) gilt. Daher lautet das Ergebnis

$$\vec{m} = 2\pi I r^2 \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \quad .$$

Lösungsweg 2 (aus einer Klausur)

Man kann das Linienintegral auch durch Projektion der Schleife in die xy, yz, zx-Ebene lösen, da die Gesamtbewegung der Ladungsträger sich als Superposition schreiben lassen. Daher gilt dies natürlich auch für den Strom I. Man kann dann mit den Formeln aus dem Script für ebene Stromschleifen rechnen:

In der xy-Ebene hat man

$$\vec{r}\{t\} = \begin{pmatrix} \cos\{t\} \\ \sin\{t\} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ,$$

das ist eine Kreisschleife und erzeugt nach Script ein magnetisches Moment

$$\vec{m} = 2\pi I r^2 \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \qquad ,$$

da die Schleife zweimal durchlaufen wird. In der yz-Ebene findet man

$$\vec{r}\{t\} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\{t\} \\ 2\sin\{t/2\} \end{pmatrix} \qquad .$$

Durch Zeichnen der Spur von $\vec{r}\{t\}$ sieht man, dass es sich um eine Schleife mit Überkreuzung handelt. Das magnetische Moment hebt sich also gerade auf. In der zx-Ebene schließlich

$$\vec{r}\{t\} = \begin{pmatrix} \cos\{t\} \\ 0 \\ 2\sin\{t/2\} \end{pmatrix} \qquad .$$

Auch diese Schleife hat eine Überkreuzung, daher ist auch dieser Beitrag null. Die Lösung lautet also

$$\vec{m} = 2\pi I r^2 \vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z} \qquad .$$