Elektromagnetische Felder und Wellen

Klausur Herbst 2001

Aufgabe 1 (2 Punkte)

An der Grenzfläche zwischen einem idealen Isolator und einem realen Leiter mit Leitfähigkeit σ_1 fließt die Sromdichte $\vec{j}_1$ im Leiter. Die Grenzfläche wird durch $z = 0$ beschrieben und der Leiter ist im Bereich $z \geq 0$. Wie groß ist die Stromdichte in z- Richtung an der Grenzfläche, wenn nur eine endliche Oberflächenladung zulässig ist?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Eine ebene Welle breitet sich im Medium 1, Brechzahl n_1, mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}_1 = n_1 k_0 \vec{e}_\mathrm{x}$ aus. Sie trifft auf eine ebene Grenzfläche zum Medium 2, Brechzahl n_2. Die Grenzfläche wird durch $\vec{n} = \sqrt{2}/2(\vec{e}_\mathrm{x} - \vec{e}_\mathrm{y})$ charakterisiert. Wie lautet der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Im freien Raum lautet das magnetische Feld einer Welle $\vec{H} = H_0(\exp\{-i(\pi x/a + \pi/2 + \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y} + \exp\{-i(\pi x/a + \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{z})$. In welche Richtung breitet sich die Welle aus? Welchen Polarisationszustand hat die Welle? Wie lautet das zugehörige elektrische Feld?

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Außerhalb eines Kabels wird in 2 cm Abstand zur Kabelachse die magnetische Induktion $((1/\rho)\sin\{\phi\}\vec{e}_\rho + \vec{e}_\phi) \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$ gemessen, wobei das Koordinatensystem so gelegt wurde, dass die z- Achse des Messsystems mit der Kabelachse zusammenfällt. Welcher Strom fließt in z- Richtung durch das Kabel?

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial einer Welle lautet $\vec{A} = A\exp\{i(kz - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{x}$. Sie trifft auf eine ebene Grenzfläche, deren Normalenvektor $\vec{n} = \sqrt{2}/2(\vec{e}_\mathrm{y} + \vec{e}_\mathrm{z})$ ist. Wie ist die Welle bezüglich der Grenzfläche polarisiert?

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius $R = 2\,\text{cm}$ wird im freien Raum das elektrische Feld $\vec{E} = (\sin\{\theta\}\vec{e}_\text{r} + \cos\{\theta\}\vec{e}_\theta + \sin\{\phi\}\vec{e}_\phi) \cdot 1\text{V/m}$ gemessen. Wie groß ist die in der Kugel eingeschlossene Ladung als Vielfaches der Elementarladung?

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Ein paramagnetischer Würfel der Kantenlänge a grenze in einer Versuchsanodnung mit allen seinen ebenen Flächen an das Vakuum. Die Grenzflächen seien elektrisch leitfähig. Um den Würfel wird eine konstante magnetische Induktion $\vec{B}_0$ im Vakuum erzeugt. Die Richtung von $\vec{B}_0$ sei senkrecht auf eine (zwei) der Würfelflächen. Berechnen Sie die Oberflächenstromdichten $\vec{j}$ auf allen Würfeloberflächen.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Die Mitte einer geraden Dipolantenne befinde sich im Ursprung. Um die Antenne herum befinde sich ein verlustfreies Medium mit Wellenwiderstand $Z_M \in \mathbb{R}$. Am Speisepunkt, in der Mitte der Antenne, fließe die Stromdichte

$$\begin{aligned}\vec{j}\{t\} &= \vec{j}_0 \sin\{\omega \cdot t\} \\ &= j_0 \sin\{\omega \cdot t\}\vec{e}_z \qquad .\end{aligned}$$

Der Einfluss der Speiseleitung selbst soll vernachlässigt werden!
Wir betrachten eine infinitisimal kleine Umgebung um den Speisepunkt und nehmen an, dass sich von dort eine ebene harmonische Welle mit reellem $\vec{k}$ genau senkrecht zum Dipol ausbreite. Leiten Sie unter der Annahme, dass der elektrische Feldstärkevektor der Welle proportional zu $\vec{j}_0$ ist, einen Ausdruck für den Poyntingvektor dieser Welle her.
Die Abstrahlung der Antenne in diesem Modell soll für zwei verschiedene sie umgebende Medien untersucht werden.

- Luft ($\mu = 1$, $\varepsilon = 1$)
- Wasser ($\mu = 1$, $\varepsilon = 81$)

Wie verändert sich der Betrag von $\vec{S}$ mit steigendem ε? Erscheint ihnen dies physikalisch sinnvoll? Was ist also von diesem Modell zu halten? Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Auf einer geraden Dipolantenne der Länge L fließe die Stromdichte

$\vec{j}\{\vec{r},t\} = I_0 \sin\left\{k\left(\frac{L}{2} - z\right)\right\}\delta\{x\}\delta\{y\}\sin\{\omega \cdot t\}\vec{e}_z$. Welche Relation muss zwischen der Sendefrequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ und der Länge L bestehen, damit die Randbedingungen auf der Antenne erfüllt werden können? Geben sie diese Randbedingungen an! Die Mitte der Antenne befinde sich im Ursprung. Die Speiseleitung, welche in der Mitte ansetzt, wird hier nicht mitbetrachtet. Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment der Anordnung.

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Gegeben sei ein rechteckiger Hohlleiter der Länge $2L$. Seine Seitenwände seien aus ideal leitfähigem Metall und elektrisch mit dem Erdpotential verbunden. Das Koordinatensystem soll so gelegt werden, dass sich die Innenseiten der Wände bei $x = 0$ und $x = a$ sowie $y = 0$ und $y = b$ befinden. Im Inneren befinde sich keine Ladung. Auf den Stirnflächen bei $z = L$ und $z = -L$ seien die Potentiale $V\{z = L\} = V_L = V_e\{x,y\} + V_0$ und $V\{z = -L\} = V_{-L} = V_e\{x,y\} - V_0$ eingeprägt. Skizzieren Sie die Anordnung. Wählen Sie einen Lösungsansatz für das Potenzial im Inneren, der bereits möglichst viele Randbedingungen auf den Begrenzungsflächen erfüllt. Wie müssen $V_e\{x,y\}$ und $V_0 = const.$ gewählt werden, falls nur ein einziger Koeffizient im Reihenansatz für das Feld im Inneren existieren soll?

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Im Bereich $0 \leq x \leq L$ mit $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ existiere eine Stromdichteverteilung der Art $\vec{j}\{\vec{r},t\} = I_0 \sin\left\{\frac{\pi}{2L}(x - L)\right\} \cdot \sin\{\omega t\} \cdot \delta\{y\}\delta\{z\} \cdot \vec{e}_x$. Berechnen Sie das elektrische Feld auf der x-Achse im Bereich $0 \leq x \leq L$ unter Verwendung des Produktansatzes $\vec{E}\{\vec{r},t\} = \vec{E}_x\{\vec{r}\} \cdot E_t\{t\}$ und der Kontinuitätsgleichung. Existiert auch in der Umgebung des Stromes ein elektrisches Feld? Begründen Sie Ihre Ansicht!

Aufgabe 12 (5 Punkte)

Auf der x-Achse sind im Abstand d abwechselnd positive und negative Ladungen der Größe Q angeordnet, beginnend mit einer positiven Ladung im Ursprung. Berechnen Sie das Potenzial dieser Anordnung. Skizze!

Aufgabe 13 (7 Punkte)

Ein unendlich ausgedehnter Plattenkondensator besitzt ein inhomogenes Dielektrikum mit $\varepsilon = \exp\{-\frac{x}{d}\}$. Auf den Platten wird bei $x = d$ das Potenzial V_0, bei $x = 0$ das Potenzial $V = 0$, vorgegeben. Es gilt $\varrho = 0$. Wie lautet die Potenzialgleichung in diesem Fall ? Berechnen Sie daraus den Potenzialverlauf im Dielektrikum.

Aufgabe 14 (9 Punkte)

Gegeben sei ein unendlich dünner Stromfaden endlicher Leitfähigkeit σ der sich von $z = -L$ bis $z = L$ erstreckt. Bei $z = L$ wird das Potenzial V vorgegeben, bei $z = -L$ ist der Stromfaden geerdet. Die Effekte der Zuleitungen sollen vernachlässigt werden.

1. Wie groß ist die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ und die Stromdichte $\vec{j}$?
2. Berechnen Sie das Vektorpotenzial $\vec{A}$ und die magnetische Induktion $\vec{B}$!

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Ein unendlich langes Rohr mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 wurde magnetisiert. Es gelte $\vec{M} = \frac{\rho^2}{3r_2^2 - r_1^2} M_0 \cdot \vec{e}_\rho$ im Bereich $r_1 \leq \rho \leq r_2$. Berechnen Sie das magnetische Potenzial und das magnetische Feld im Bereich $r_1 \leq \rho \leq r_2$ unter der Annahme $\phi_M\{r_1\} = 0$.
Hinweis: Das Ergebnis ist eindeutig.