Aufgabe 1

Lösung

Die Stetigkeitsbedingung der Stromdichte an einer Grenzfläche lautet

$$\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varrho_\mathrm{S}$$

Da im Isolator kein Strom fließt, resultiert sofort, dass die Oberflächenladungsdichte ϱ_S bei von Null verschiedener Stromdichte $\vec{n} \circ \vec{j}_1$ mit der Zeit über alle Grenzen wächst. An der Grenzfläche zwischen einem idealen Isolator und einem Leiter fließt also kein Gleichstrom in Normalenrichtung:

$$\vec{n} \circ \vec{j} = 0$$

(Diese Aussage steht auch direkt im Vorlesungsmanuskript!) Die Grenzfläche liegt bei $z = 0$ und somit ist der Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{z}$. Daraus folgt:

$$\vec{j} \circ \vec{e}_\mathrm{z} = 0 \quad .$$

Aufgabe 2

Lösung

Der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle setzt sich aus der Normal- und der Transversalkomponente zusammen:

$$\vec{k}_\mathrm{tr} = (\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{tr}) \cdot \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{k}_\mathrm{tr}) \times \vec{n}$$

Die Transversalkomponenten sind stetig (Snelliusgesetz), die Normalkomponenten gehorchen dem Reflexionsgesetz:

$$(\vec{n} \times \vec{k}_\mathrm{tr}) \times \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{k}_\mathrm{in}) \times \vec{n}$$

$$\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{tr} = \sqrt{\|\vec{k}_\mathrm{tr}\|^2 - \|\vec{k}_\mathrm{in}\|^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{in})^2}$$

Nach Aufgabenstellung ist $\|\vec{k}_\mathrm{in}\| = n_1 k_0$ und $\|\vec{k}_\mathrm{tr}\| = n_2 k_0$. Für die Transversalkomponente von $\vec{k}_\mathrm{tr}$ resultiert

$$(\vec{n} \times \vec{k}_\mathrm{tr}) \times \vec{n} = (n_1 k_0 \sqrt{2}/2(\vec{e}_\mathrm{x} - \vec{e}_\mathrm{y}) \times \vec{e}_\mathrm{x}) \times \vec{n} = n_1 k_0 (\vec{e}_\mathrm{z} \times (\vec{e}_\mathrm{x} - \vec{e}_\mathrm{y}))/2 = n_1 k_0 (\vec{e}_\mathrm{x} + \vec{e}_\mathrm{y})/2 \quad .$$

Die Normalkomponente ergibt sich mit

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = n_1 k_0 \sqrt{2}/2$$

zu

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2/2} = k_0 \sqrt{2n_2^2 - n_1^2}/\sqrt{2} \quad .$$

Das Endergebnis lautet entsprechend

$$\vec{k}_{\text{tr}} = \left(\left(n_1 + \sqrt{2n_2^2 - n_1^2} \right) \vec{e}_{\text{x}} + \left(n_1 - \sqrt{2n_2^2 - n_1^2} \right) \vec{e}_{\text{y}} \right) k_0/2$$

Aufgabe 3

Lösung

Die Ausbreitungsrichtung folgt aus der Phase Φ der Welle:

$$\vec{H} = H_0(\exp\{i\pi/2\}\vec{e}_{\text{x}} + \vec{e}_{\text{y}}) \exp\{-i(\pi x/a + \omega t)\} = \vec{H}_0 \exp\{-i(\pi x/a + \omega t)\} = \vec{H}_0 \exp\{\pm i\Phi\}$$

mit $\Phi = \vec{k} \circ \vec{r} - \omega t = -\pi x/a - \omega t$. Die Welle breitet sich in $\vec{k}$-Richtung aus, also hier in $-x$-Richtung. Die Größe von k ist dabei $k = \pi/a$ (nicht gefragt).

Der Polarisationszustand ergibt sich aus den Amplituden und Phasen der Komponenten des Amplitudenvektors $\vec{H}_0 = H_0(\exp\{i\pi/2\}\vec{e}_{\text{x}} + \vec{e}_{\text{y}})$. Zwischen den Komponenten herrscht eine Phasenverschiebung von $\pi/2$, es handelt sich also mindestens um eine elliptisch polarisierte Welle. Da die Amplituden gleich groß sind, entartet die Ellipse zum Kreis, die Welle ist also **zirkular polarisiert**. Die Drehrichtung war nicht gefragt. Sie kann aus der Lage des Realteiles des Amplitudenvektors an einem festen Ort für verschiedene aufeinander folgende Zeitpunkte bestimmt werden. Speziell für $x = 0$ und $t = 0$ bzw. $t = \pi/(2\omega)$ ergibt sich, dass die Welle rechts um die x-Achse dreht. Das heißt dann, dass die Welle in Ausbreitungsrichtung **linksdrehend zirkular** polarisiert ist.

Das elektrische Feld ergibt sich für die hier vorliegende Welle direkt aus

$$\vec{E} = \frac{Z}{k} \vec{H} \times \vec{k} = -ZH_0 \exp\{-i(\pi x/a + \omega t)\}(\vec{e}_{\text{y}} + i\vec{e}_{\text{z}}) \quad .$$

Aufgabe 4

Lösung

Der (Netto)-Strom durch das Kabel und das magnetische Feld hängen über

$$I = \iint\limits_S \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = \oint\limits_{C_\mathrm{S}} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{\ell}$$

zusammen. Das Wegelement ist hier $\mathrm{d}\vec{\ell} = \rho\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$, wobei $\varphi \in \{0, 2\pi\}$. Das magnetische Feld folgt in Luft aus der magnetischen Induktion mit $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$. Nach dem Skalarprodukt bleibt nur noch die einfache φ- Integration (Faktor 2π). Der Strom ergibt sich dann nach Einsetzen zu

$$I = B \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \rho \cdot 2\pi = 10^{-7}\,\mathrm{T} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}\,(\mathrm{Vs})/(\mathrm{Am})} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot 2\pi = 10\,\mathrm{mA} \quad .$$

Aufgabe 5

Lösung

Das magnetische Feld der Welle ist

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\nabla \times \vec{A} = \frac{ik}{\mu\mu_0} A \exp\{i(kz - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y} \quad .$$

Die Welle breitet sich in z-Richtung aus ($\vec{k} = k\vec{e}_\mathrm{z}$). Der Vector $\vec{e}_\ell$, mit dem bestimmt wird, welche Polarisationsrichtung bezüglich der Grenzfläche vorliegt, folgt aus

$$\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n} \times \vec{k}}{\|\vec{n} \times \vec{k}\|} = \vec{e}_\mathrm{x} \quad .$$

Das magnetische Feld steht senkrecht auf $\vec{e}_\ell$. Bleibt noch die Kontrolle, wie das elektrische Feld liegt. Dazu wird $\vec{E}$ berechnet:

$$\vec{E} = \frac{Z}{k}\vec{H} \times \vec{k} = i\omega A \exp\{i(kz - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{x} \quad .$$

Da das elektrische Feld parallel zu $\vec{e}_\ell$ liegt, ist die Welle transversal elektrisch (TE) zur Grenzfläche polarisiert.

Dies Ergebnis hätte man auch schon aus $\vec{H}$ direkt durch überlegen bestimmen können. Es handelt sich bei $\vec{H}$ um eine ebene Welle, die sich in z- Richtung ausbreitet. Da $\vec{E}$ sowohl auf $\vec{H}$ als auch auf $\vec{k}$ senkrecht stehen muss, ist das elektrische Feld in x- Richtung polarisiert. Die x- Richtung ist senkrecht zu $\vec{n}$ und damit parallel zur Grenzfläche, woraus die TE Polarisation bezüglich der Grenzfläche folgt.

Aufgabe 6

Lösung

Die in einem Raumgebiet eingeschlossene Ladung folgt aus

$$Q = \oiint_{S_V} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{S}$$

mit dem Oberflächenelement $\mathrm{d}^2\vec{S} = r^2 \sin\{\theta\}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \vec{e}_\mathrm{r}$ für die hier vorliegende Kugel. Dabei ist $r = 2\mathrm{cm}$, $\theta \in \{0, \pi\}$ und $\phi \in \{0, 2\pi\}$. Nach einsetzen folgt hier für den Integranden mit $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$

$$\vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} 4 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 \sin^2\{\theta\}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \simeq 3.5 \cdot 10^{-15}\mathrm{As} \sin^2\{\theta\}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$$

und nach Integration

$$Q \simeq 3.5 \cdot 10^{-15}\mathrm{As}\, [\phi]_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}\left(\theta - \sin\{2\theta\}/2\right)\right]_0^{\pi}$$

$Q \simeq 3.5 \cdot 10^{-14}\mathrm{As} \simeq 2.2 \cdot 10^5\mathrm{e}$ mit der Elementarladung $e \simeq 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{As}$.

Aufgabe 7

Lösung

Interessant sind nur die Flächen, an denen das Magnetfeld tangential anliegt. Auf den Flächen senkrecht ist das $\vec{B}$-Feld stetig:

$$\vec{n} \circ \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0 \tag{1}$$

Es sei angenommen, daß das angelegte Feld parallel zu x-Achse liegt:

$$\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_\mathrm{x} \tag{2}$$

Dann gilt auf allen parallelen Flächen:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{j}_s \tag{3}$$
$$= \vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_0\mu_2}\vec{B}_0 - \frac{1}{\mu_0\mu_1}\vec{B}_0\right) \tag{4}$$

Da im Vakuum gilt $\mu_1 = 1$:

$$\vec{j}_s = \frac{1}{\mu_0}\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_0 - \vec{B}_0\right) \tag{5}$$
$$= \vec{n} \times \left(\frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - 1\right)\vec{e}_{\mathrm{x}}\right) \tag{6}$$

Es bleibt, die vier Flächen durch $\vec{n}_{1,2} = \pm\vec{e}_{\mathrm{y}}$ und $\vec{n}_{3,4} = \pm\vec{e}_{\mathrm{z}}$ zu unterscheiden. Mit

$$\vec{e}_{\mathrm{x}} \times (\pm\vec{e}_{\mathrm{y}}) = \pm\vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{7}$$
$$\vec{e}_{\mathrm{x}} \times (\pm\vec{e}_{\mathrm{z}}) = \mp\vec{e}_{\mathrm{y}} \tag{8}$$

erhält man also eine Oberflächenstromdichte der Stärke $\frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - 1\right)$, die um den Würfel "im Kreis" herumfließt.

Aufgabe 8

Lösung

Lt. Aufgabe sollte das Feld der abgestrahlten ebenen Welle proportional zu $\vec{j}_0$ sein. Mit der Proportionalitätskonstanten E_j folgt somit:

$$\vec{E}\{t\} = E_j\vec{j}_0 \exp\{i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t\} \tag{9}$$
$$= E_j j_0 \exp\{i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t\}\vec{e}_z \tag{10}$$

Den Pointing-Vektor berechnet man z.B. aus:

$$\vec{S} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z}\frac{\|\vec{E}\|^2 + |\vec{E}|^2}{2}\frac{\vec{k}}{k}\right\} \tag{11}$$

In Zylinderkoordinaten kann man $\vec{k} = k \cdot \vec{e}_\rho$ wählen. Das erfasst alle Richtungen senkrecht zum Strom.
Für reelles $\vec{k}$ und Z, wie hier gefordert, ist im Skript die Lösung angegeben:

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{Z} \cos^2\{kr - \omega t\} \frac{\vec{k}}{k} \tag{12}$$

$$= \frac{(E_j j_0)^2}{Z} \cos^2\{kr - \omega t\} \vec{e}_\rho \tag{13}$$

Mit

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon_o \varepsilon}} \tag{14}$$

folgt

$$S \sim \sqrt{\varepsilon} \tag{15}$$

Das würde bedeuten, daß die Antenne unter Wasser besser abstrahlt als im Vakuum, was weder physikalisch sinnvoll, noch realistisch ist. Tatsächlich findet man im hinteren Teil des Skripts $S \sim Z$.

Aufgabe 9

Lösung
Randbedingung: An den Enden der Antenne bei $z = \pm L/2$ muß der Strom zu Null werden und das für jeden beliebigen Zeitpunkt!

$$I_0 \sin \left\{ k \left(\frac{L}{2} - (\pm \frac{L}{2}) \right) \right\} \sin\{\omega \cdot t\} = 0 \tag{16}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{17}$$

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \tag{18}$$

$$\Rightarrow k = 2\pi \frac{f}{c_0} \tag{19}$$

$$\sin\left\{2\pi \frac{f}{c_0} L\right\} = 0 \tag{20}$$

$$L = l \cdot \frac{\lambda}{2} = l \cdot \frac{1}{2}\frac{c_0}{f} \qquad l \in \mathbb{N} \tag{21}$$

magnetische Dipolmoment:

$$\begin{aligned}
\vec{m} &= \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{r} \times \vec{j}\, \mathrm{d}^3 r \\
&= \frac{1}{2} \iiint\limits_V (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \times \left(I_0 \sin\left\{k \left(\frac{L}{2} - z\right)\right\} \delta\{x\}\delta\{y\} \sin\{\omega t\} \cdot \vec{e}_z \right) \mathrm{d}^3 r \\
&= \frac{1}{2} \iiint\limits_V (y\vec{e}_x - x\vec{e}_y) \cdot \left(I_0 \sin\left\{k \left(\frac{L}{2} - z\right)\right\} \delta\{x\}\delta\{y\} \sin\{\omega t\} \right) \mathrm{d}^3 r \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Lösung

$$V = \sin\{n\pi \frac{x}{a}\} \sin\{m\pi \frac{y}{b}\} \left(A_{n,m} \sinh\{k_{n,m} z\} + B_{n,m} \cosh\{k_{n,m} z\}\right) \tag{22}$$

$$k_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \tag{23}$$

$$V\{z = L\} = V_e\{x,y\} + V_0 \tag{24}$$

$$V\{z = -L\} = V_e\{x,y\} - V_0 \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
V_e\{x,y\} + V_0 &= \sin\{n\pi \frac{x}{a}\} \sin\{m\pi \frac{y}{b}\} \left(A_{n,m} \sinh\{k_{n,m} L\} + B_{n,m} \cosh\{k_{n,m} L\}\right) \\
V_e\{x,y\} - V_0 &= \sin\{n\pi \frac{x}{a}\} \sin\{m\pi \frac{y}{b}\} \left(-A_{n,m} \sinh\{k_{n,m} L\} + B_{n,m} \cosh\{k_{n,m} L\}\right)
\end{aligned}$$

$$2V_e\{x,y\} = 2 \sin\{n\pi \frac{x}{a}\} \sin\{m\pi \frac{y}{b}\} B_{n,m} \cosh\{k_{n,m} L\} \tag{26}$$

$$V_0 = \sin\{n\pi \frac{x}{a}\} \sin\{m\pi \frac{y}{b}\} A_{n,m} \sinh\{k_{n,m} L\} \tag{27}$$

$$A_{n,m}\sinh\{k_{n,m}L\} = \frac{1}{4ab}\int_0^a\int_0^b V_0\cdot\sin\{n\pi\frac{x}{a}\}\sin\{m\pi\frac{y}{b}\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{28}$$

$$= \frac{V_0}{4ab}\cdot\left[\frac{a}{n\pi}\cos\{n\pi\frac{x}{a}\}\right]_0^a\cdot\left[\frac{b}{m\pi}\cos\{m\pi\frac{y}{b}\}\right]_0^b \tag{29}$$

$$= \begin{cases}\frac{V_0}{4nm\pi^2}\cdot 2\cdot 2 & \text{für n, m ungerade} \in \mathbb{N}_0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \tag{30}$$

$$\Rightarrow V_0 = 0 \tag{31}$$

$$B_{n,m}\cosh\{k_{n,m}L\} = \frac{1}{4ab}\int_0^a\int_0^b V_l\{x,y\}\cdot\sin\{n\pi\frac{x}{a}\}\sin\{m\pi\frac{y}{b}\}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{32}$$

$$\Rightarrow V_l\{x,y\} = \sin\{n'\pi\frac{x}{a}\}\sin\{m'\pi\frac{y}{b}\} \tag{33}$$

Für festgelegte n' und m' gilt

$$k^2_{n',m'} = \left(\frac{n'\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m'\pi}{b}\right)^2 = k'^2 \tag{34}$$

und es existiert dann nur der Koeffizient

$$B_{n',m'} = \frac{1}{\cosh\{k'L\}}\frac{1}{4ab}\underbrace{\int_0^a \sin\{n'\pi\frac{x}{a}\}\sin\{n\pi\frac{x}{a}\}\,\mathrm{d}x}_{\delta_{n,n'}}\underbrace{\int_0^b \sin\{m'\pi\frac{y}{b}\}\sin\{m\pi\frac{y}{b}\}\,\mathrm{d}y}_{\delta_{m,m'}}$$

Aufgabe 11

Lösung

Nach der Kontinuitätsgleichung muß gelten:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho\{\vec{r},t\} + \nabla\circ\vec{j}\{\vec{r},t\} = 0 \tag{35}$$

Nach der Maxwellgleichung:

$$\nabla \circ \vec{D} = \varrho \tag{36}$$

folgt für $\varepsilon = 1$:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \circ \vec{E}\{\vec{r}, t\} + \nabla \circ j\{\vec{r}, t\} = 0 \tag{37}$$

Einsetzen führt für den eindimensionalen Fall auf:

$$\begin{aligned}
0 &= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}\{x, t\} + \frac{\partial}{\partial x} \left(I_0 \sin\left\{ \frac{\pi}{2L}(x - L) \right\} \cdot \sin\{\omega t\} \cdot \delta\{y\}\delta\{z\} \right) && (38)\\
&= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}\{x, t\} + I_0 \frac{\pi}{2L} \cos\left\{ \frac{\pi}{2L}(x - L) \right\} \cdot \sin\{\omega t\} \cdot \delta\{y\}\delta\{z\} && (39)\\
&= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\vec{E}_x\{x\} \cdot E_t\{t\} \right) + I_0 \frac{\pi}{2L} \cos\left\{ \frac{\pi}{2L}(x - L) \right\} \delta\{y\}\delta\{z\} \cdot \sin\{\omega t\} && (40)\\
&= \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_t\{t\} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \vec{E}_x\{x\} + I_0 \frac{\pi}{2L} \cos\left\{ \frac{\pi}{2L}(x - L) \right\} \delta\{y\}\delta\{z\} \cdot \sin\{\omega t\} && (41)
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} E_t\{t\} &= -\sin\{\omega t\} && (42)\\
\Rightarrow \quad E_t\{t\} &= \frac{1}{\varepsilon_0 \omega} \cos\{\omega t\} + C_t\{x\} && (43)\\
\frac{\partial}{\partial x} E_x\{x\} &= I_0 \frac{\pi}{2L} \cos\left\{ \frac{\pi}{2L}(x - L) \right\} \delta\{y\}\delta\{z\} && (44)\\
\Rightarrow \quad \vec{E}_x\{x\} &= I_0 \sin\left\{ \frac{\pi}{2L}(x - L) \right\} \delta\{y\}\delta\{z\} \cdot \vec{e}_x + C_x\{t\} && (45)
\end{aligned}$$

Selbstverständlich können die orts- und zeitunabhängigen Konstanten wie ε_0 und I_0 beliebig auf die beiden Lösungsanteile aufgeteilt werden. Außerdem müssen $C_x\{t\}$ und $C_t\{x\}$ zu Null gesetzt werden, da sonst der Produktansatz nicht mehr funktioniert!
Auf Grund der Stetigkeit der tangentialen $\vec{E}$-Feldkomponente, muß zumindest in unmittelbarer Umgebung des Stromes ebenfalls ein Feld existieren!

Aufgabe 12

Lösung
Das Potenzial einer Anordnung von Punktladungen lautet

$$V\{\vec{r}\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}'|} \quad . \tag{46}$$

Für diesen Fall ist

$$Q_i = (-1)^i Q \tag{47}$$

und

$$\vec{r}_i = id \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} \tag{48}$$

Damit lautet die Lösung

$$V\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{(x-id)^2 + y^2 + z^2}} \tag{49}$$

oder auf Grund der Tatsache, dass V(x)=V(-x)

$$V\{\vec{r}\} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{(x-id)^2 + y^2 + z^2}} \tag{50}$$

Aufgabe 13

Lösung
Die Potenzialgleichung lautet

$$\epsilon\{\vec{r}\}\epsilon_0 \Delta V\{\vec{r}\} + \epsilon_0 \nabla\epsilon\{\vec{r}\} \circ \nabla\{\vec{r}\} = -\varrho\{\vec{r}\} \qquad . \tag{51}$$

und gilt für Dielektrika dessen Gradient nicht verschwindet. Einsetzen von $\epsilon = \exp(-\frac{x}{d})$ liefert eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\epsilon_0 \frac{d^2V}{dx^2} - \frac{\epsilon_0}{d}\frac{dV}{dx} = 0 \qquad , \tag{52}$$

dessen charakteristisches Polynom $\lambda^2 - \frac{1}{d}\lambda = 0$ mit den Eigenwerten $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{1}{d}$ ist. Das Fundamentalsystem der DGL ist damit

$$V = V_1 + V_2 \exp\left(\frac{x}{d}\right) \tag{53}$$

Die Konstanten V_1 und V_2 müssen jetzt mit den Randbedingungen ermittelt werden. Mit $V\{x=0\} = 0$ folgt

$$V_1 + V_2 = 0 \qquad . \tag{54}$$

und mit $V\{x = d\} = V_0$ ergibt sich

$$V_1 + eV_2 = V_0 \qquad . \tag{55}$$

Nach Bestimmen V_1 und V_2 kann die Lösung für das Potenzial angegeben werden:

$$V = \frac{V_0}{1-e}\left(\exp\left\{\frac{x}{d}\right\} - 1\right) \tag{56}$$

Aufgabe 14

Lösung

Im Gebiet des Stromfaden gilt die Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$, wobei $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ gilt. Nach zweimaligem Integrieren und Einsetzen der Randbedingungen findet man

$$V = \frac{V_0}{2L}(z + L) \qquad , \tag{57}$$

Das Feld im Leiter berechnet sich aus dem Gradienten des Potenzials $\vec{E} = -\nabla V$

$$\vec{E} = -\frac{V_0}{2L} \cdot \vec{e}_z \qquad . \tag{58}$$

Mit dem ohmschen Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ kann man im Bereich des Leiters den Strom ausrechnen

$$\vec{j} = -\sigma\frac{V_0}{2L} \cdot \vec{e}_z \qquad . \tag{59}$$

Die Stromdichte für den gesamten Raum lautet dann

$$\vec{j}\{\vec{r}\} = -\sigma\frac{V_0}{2L}\delta\{x\}\delta\{y\}\vec{e}_z \qquad . \tag{60}$$

Das Vektorpotenzial berechnet sich aus

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = -\frac{\mu_0 V_0 \sigma}{8\pi L}\iint\limits_{\infty}^{\infty}\int_{-L}^{L}\frac{\delta\{y'\}\delta\{x'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dz'dx'dy' \cdot \vec{e}_z \qquad . \tag{61}$$

Nach Integration in x- und y-Richtung erhält man

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = -\frac{\mu_0 V_0 \sigma}{8\pi L}\int_{-L}^{L}\frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} \cdot \vec{e}_z \qquad . \tag{62}$$

Nach Integraion in z-Richtung folgt

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = -\frac{\mu_0 \sigma V_0}{8\pi L} \ln\left\{\frac{z - L + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-L)^2}}{z + L + \sqrt{x^2 + y^2 + (z+L)^2}}\right\} \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}} \qquad . \tag{63}$$

Mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ergibt sich:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma V_0}{8\pi L} \begin{pmatrix} \frac{y}{(z-L+\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2})\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2}} - \frac{y}{(z+L+\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2})\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2}} \\ \frac{x}{(z+L+\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2})\sqrt{x^2+y^2+(z+L)^2}} - \frac{x}{(z-L+\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2})\sqrt{x^2+y^2+(z-L)^2}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{64}$$

Aufgabe 15

Lösung
Es gilt

$$\Delta \phi_{\mathrm{M}} = \nabla \circ \vec{M} \tag{65}$$

mit

$$\nabla \circ \vec{M} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \cdot \frac{\rho^2}{3r_2^2 - r_1^2} M_0) = \frac{3\rho}{3r_2^2 - r_1^2} M_0 \qquad . \tag{66}$$

Aus $\Delta \phi_{\mathrm{M}} = \nabla \circ \vec{M}$ wird

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \phi_{\mathrm{M}}) = \frac{3\rho}{3r_2^2 - r_1^2} M_0 \qquad . \tag{67}$$

Durch zweimaliges Integrieren bekommt man das Potenzial ϕ_{M}

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\phi_{\mathrm{M}} = \frac{\rho^2}{3r_2^2 - r_1^2} M_0 + \frac{C_1}{\rho} \tag{68}$$

$$\phi_{\mathrm{M}} = \frac{\rho^3}{9r_2^2 - 3r_1^2} M_0 + C_1 \ln\left\{\frac{\rho}{r_1}\right\} + C_2 \tag{69}$$

Die Integrationskonstante C_2 kann man aus der angegebenen Randbedingung $\phi_{\mathrm{M}} = 0$ bei $\rho = r_1$ berechnen

$$C_2 = -\frac{r_1^3}{9r_2^2 - 3r_1^2} M_0 \qquad . \tag{70}$$

Für die Berechnung von C_1 muss man im Bereich $\rho \leq r_1$ das Potenzial berechnen. Die Berechnung des magnetsichen Potenzials im Inneren des Rohers führt auf den Ansatz $\phi_{\mathrm{M}} = D_1 \ln\left\{\frac{\rho}{r_1}\right\} + D_2$ (Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten, siehe Übung). Da die magnetische Energiedichte nicht divergieren darf, muss $D_1 = 0$ sein. Stetigkeit von $H_\rho = -\frac{\partial}{\partial\rho}\phi_{\mathrm{M}}$ erfordet

$$0 = \frac{r_1^2}{3r_2^2 - r_1^2} M_0 + \frac{C_1}{r_1} \tag{71}$$

und damit

$$C_1 = -\frac{r_1^3}{3r_2^2 - r_1^2} M_0 \qquad . \tag{72}$$

Das Potenzial und das Magnetfeld lauten also

$$\phi_{\mathrm{M}} = \frac{M_0}{3r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{\rho^3 - r_1^3}{3} - 3r_1^3 \ln\left\{\frac{\rho}{r_1}\right\} \right) \tag{73}$$

$$\vec{H} = -\frac{M_0}{3r_2^2 - r_1^2} \left(\frac{\rho^2}{3} - \frac{3r_1^3}{\rho} \right) \vec{e}_\rho \tag{74}$$