Aufgabe 1 (3 Punkte)

Lösung

Das elektrische Feld liegt parallel zur Grenzfläche, also ist die Welle TE- polarisiert. Der Reflektionsfaktor ist laut Skript dann

$$r = \frac{\vec{n} \circ \vec{k}_1 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + \|\vec{n} \circ \vec{k}_1\|^2}}{\vec{n} \circ \vec{k}_1 - \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + \|\vec{n} \circ \vec{k}_1\|^2}} = \frac{n_1 \cos\{\theta\} - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2 \cos^2\{\theta\}}}{n_1 \cos\{\theta\} + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2 \cos^2\{\theta\}}} \quad .$$

Nach Umstellen folgt

$$\sqrt{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2 \cos^2\{\theta\}} = n_1 \cos\{\theta\} \frac{1-r}{1+r}$$

und damit

$$n_2 = n_1 \sqrt{1 + \cos^2\{\theta\} \left(\left(\frac{1-r}{1+r} \right)^2 - 1 \right)} = 1.5\sqrt{7} \simeq 3.97$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Lösung

Das Feld auf der Innenseite geht aus den Stetigkeitsbedingungen hervor. Zunächst muss das tangentiale $\vec{E}$- Feld stetig sein. Das heißt

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad .$$

Im weiteren muss das normale $\vec{D}$- Feld bis auf die Oberflächenladung stetig sein. Über die Oberflächenladung ist nichts bekannt. Dies gibt also keine Information. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt noch, dass die Normalkomponente der Stromdichte stetig ist:

$$\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0 \quad .$$

Mit der Wahl $\vec{n} = \vec{e}_\rho$ tragen die Größen außerhalb des Zylinders den Index 2 und innerhalb den Index 1. Das elektrische Feld außerhalb des Zylinders ist nach Vorgabe

$$\vec{E}_2 = -E_\rho \vec{e}_\rho \pm E_\phi \vec{e}_\phi = 1\,\mathrm{V/m}(-\vec{e}_\rho \pm \vec{e}_\phi) \quad ,$$

so dass für das $\vec{E}$- Feld Innen mit $\vec{E}_1 = E_{1\rho}\vec{e}_\rho + E_{1\phi}\vec{e}_\phi$ das tangentiale Feld $E_{1\phi} = E_\phi$ folgt. Die Stromdichte außerhalb des Zylinders ist wegen mangelnder Leitfähigkeit $\vec{j}_2 = 0$ und somit gilt

$$\vec{j}_1 \circ \vec{e}_\rho = \sigma \vec{E}_1 \circ \vec{e}_\rho = 0 \quad ,$$

also $E_{1\rho} = 0$

$$\vec{E}_1\{\rho = D/2\} = \pm E_\phi \vec{e}_\phi = \pm 1\,\mathrm{V/m}\,\vec{e}_\phi \quad .$$

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Lösung

Der Potenzialverlauf folgt wegen der Zylindersymmetrie aus der direkten Integration der eindimensionalen Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten

$$V = V\{r_1\} + (V\{r_2\} - V\{r_1\}) \frac{\ln\{\frac{r}{r_1}\}}{\ln\{\frac{r_2}{r_1}\}}$$

wobei hier $r_1 = d/2$, $r_2 = D/2$ und $V\{r_2\} - V\{r_1\} = U$ zu setzen sind. Das elektrische Feld folgt aus der Ableitung

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial\rho} V \vec{e}_\rho = -\frac{U}{\ln\{\frac{D}{d}\}} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho \quad .$$

Die Oberflächenladung an der inneren Elektrode resultiert aus der Stetigkeitsbedingung bei $\rho = r_1$

$$\varrho_\mathrm{S} = -\vec{D} \circ \vec{e}_\rho = -\epsilon_0 \vec{E} \circ \vec{e}_\rho = \epsilon_0 \frac{U}{\ln\{\frac{D}{d}\}} \frac{2}{d}$$

und die zugehörige längenbezogene Ladung

$$Q' = \int_0^{2\pi} \varrho_\mathrm{S} r_1 \, \mathrm{d}\phi = U \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\{\frac{D}{d}\}}$$

womit die längenbezogene Kapazität

$$C' = \frac{Q'}{U} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\{\frac{D}{d}\}}$$

resultiert. Damit folgt für den Außendurchmesser

$$D = d \exp\left\{\frac{2\pi\epsilon_0}{C'}\right\} \simeq 3.5\,\mathrm{mm} \quad .$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Lösung

Das Koordinatensystem wird so gelegt, dass sich die beiden Punktladungen auf der z-Achse befinden, und zwar die positive bei $z = L/2$ und die negative bei $z = -L/2$. Für das elektrische Feld ergibt sich dann

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y} + (z - L/2)\vec{e}_\mathrm{z}}{(x^2 + y^2 + (z - L/2)^2)^{3/2}} - \frac{x\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y} + (z + L/2)\vec{e}_\mathrm{z}}{(x^2 + y^2 + (z + L/2)^2)^{3/2}} \right) \quad .$$

Das elektrische Feld auf der Fläche in der Mitte zwischen den Ladungen (bei $z = 0$) ist

$$\vec{E}_{\mathrm{M}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{\left(x^2+y^2+(L/2)^2\right)^{3/2}}\vec{e}_{\mathrm{z}} = E_{\mathrm{M}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

und im Ursprung somit

$$E_{\mathrm{M}}\{\vec{r}=0\} = E_0 = -\frac{2Q}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2} \quad .$$

Im Abstand ρ zur z- Achse soll das Feld nicht mehr als 0.5 % abgefallen sein, also

$$E_{\mathrm{M}}\{\rho\} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{L}{\left(\rho^2+(L/2)^2\right)^{3/2}} \geq (1-0.005)E_0 = -(1-0.005)\frac{2Q}{\pi\epsilon_0}\frac{1}{L^2} \quad .$$

Für ρ ergibt sich also

$$\frac{0.995}{\left(\frac{L}{2}\right)^3} = \frac{1}{\left[\rho^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Nach quadrieren und umstellen resultiert

$$\rho = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{1}{0.995^{\frac{2}{3}}}-1} \simeq 0.02893$$

Alternativ kann auch nur näherungsweise gerechnet werden:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(L/2)^3}(1-0.005) \leq \frac{1}{\left(\rho^2+(L/2)^2\right)^{3/2}} &\simeq \frac{1}{(L/2)^3\left(1+(3/2)(2\rho/L)^2\right)} \\ &\simeq \frac{1}{(L/2)^3}\left(1-(3/2)(2\rho/L)^2\right)\end{aligned}$$

woraus $(3/2)(2\rho/L)^2 \simeq 0.005$ und damit

$$\rho \simeq 0.1L/(2\sqrt{3}) \simeq 0.02887$$

folgt, was im Vergleich zum exakten Ergebnis etwa um 0.2% abweicht.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Lösung

Das Biot-Savart-Gesetz lautet

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\vec{j}_\mathrm{V}\{\vec{r}'\} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}^3 r' \quad .$$

Der Übergang zum Stromfaden erfolgt durch die Ersetzung von $\vec{j}_\mathrm{V} \, \mathrm{d}^3 r' = j_\mathrm{V} \vec{e}_\mathrm{t} \, \mathrm{d}^3 r'$ mit $\mathrm{d}^2 I \, \mathrm{d}\vec{l}$ wie im Script angegeben. Also

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \mathrm{d}^2 I \, \mathrm{d}\vec{l}$$

und damit längs der Kurve C

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times I \, \mathrm{d}\vec{l} \quad ,$$

wobei $\mathrm{d}\vec{l}$ natürlich in Tangentialrichtung zeigen muss, also

$$\mathrm{d}\vec{l}\{t\} = \left. \frac{\partial}{\partial t'} \vec{r}' \right|_{t'=t} \mathrm{d}t$$

bei gegebener parametrisierter Kurve $\vec{r}'\{t\}$ mit Parameter t.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Lösung

Im Innern gilt die Laplace-Gleichung $\Delta V = 0$. Das Potenzial ist bereits in Kugelflächenfunktionen entwickelt, also ist $V = V_0 r \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$ die gesuchte Lösung.
Auf dem formalen Weg sieht die Lösung so aus:

$$V\{a, \theta, \varphi\} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{l,m} a^l + B_{l,m} a^{-(l+1)} \right) Y_{l,m}\{\theta, \varphi\} = V_0 a \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\{\theta\}$$

jetzt wird das Skalarprodukt gebildet, damit die Orthogonalitätsrelationen angewandt werden können, also

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(A_{l,m} a^l + B_{l,m} a^{-(l+1)} \right) Y_{l,m}\{\theta, \varphi\} Y_{l,m}^*\{\theta, \varphi\} \sin\{\theta\} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi =$$

$$V_0 a \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\{\theta\} \right) Y^*_{l,m}\{\theta, \varphi\} \sin\{\theta\} \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \qquad .$$

Nach Integration bleibt

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(A_{l,m} a^l + B_{l,m} a^{-(l+1)} \right) \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} = V_0 a \delta_{1,l'} \delta_{0,m'}$$

Anwenden der Kronecker-Symbole liefert

$$A_{l',m'} a^l + B_{l',m'} a^{-(l+1)} = V_0 a \delta_{1,l'} \delta_{0,m'}$$

damit bleibt nur noch der Koeffizient $A_{1,0} = V_0$ übrig und die Lösung für den Innenraum lautet

$$V = V_0 r \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\{\theta\} \qquad .$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Lösung

Die Volumenladungsdichte wird aus dem Gaußschen Gesetz $\nabla \circ \vec{E} = \frac{\varrho_V}{\varepsilon_0}$ und $\vec{E} = -\nabla V$ berechnet. Einsetzen liefert

$$\Delta V = -\frac{\varrho_V}{\varepsilon_0}$$

und im eindimensionalen Fall

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} V = -\frac{\varrho_V}{\varepsilon_0} \qquad .$$

Nach Einsetzen des Potenzials folgt

$$\varrho_V = \varepsilon_0 \frac{V_0}{d^2} \frac{e}{e-1} \exp\left\{ -\frac{x}{d} \right\} \qquad .$$

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Lösung

Aus

$$\Delta\Phi_\mathrm{M} = \Delta \circ \vec{M}$$

kann das magnetische Potenzial berechnet werden. Die Divergenz des angegebenen Vektorfelds im Bereich $0 \leq x \leq d$ ist gerade M_0, also gilt

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\Phi_\mathrm{M} = M_0 \qquad .$$

Zweimaliges Integrieren und Einsetzen der Randbedingungen gibt

$$\Phi_\mathrm{M} = \frac{M_0}{2}x^2 - H_0 x.$$

Das Magnetfeld $\vec{H}$ lautet also

$$\vec{M} = (H_0 - M_0 x)\vec{e}_\mathrm{x} \qquad .$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Lösung

Die Wellengleichungen lauten

$$\Delta\vec{A} - \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

und

$$\Delta\phi_\mathrm{el} - \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\phi_\mathrm{el} - \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_\mathrm{el} = 0 \qquad ,$$

welche sich auf Grund von Symmetrie eindimensional schreiben lassen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{A} - \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_{\mathrm{el}} - \mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mathrm{el}} - \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_{\mathrm{el}} = 0 \qquad .$$

Mit dem Ansatz $\phi_{\mathrm{el}} = \phi_0(x)\exp\{i\omega t\}$ wird die Wellengleichung für das Potenzial zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_0 - i\mu_0\sigma\omega\phi_0 + \varepsilon\varepsilon_0\mu_0\omega^2\phi_0 = 0 \qquad .$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = \pm i\omega\sqrt{(\varepsilon\varepsilon_0 - i\sigma/\omega)\mu_0}$, daher muss der Ansatz

$$\phi_0(x) = A\exp\{i\lambda x\} + B\exp\{-i\lambda x\}$$

gewählt werden, wobei $i\lambda = \lambda_1$. Jetzt muss man nur noch die Randbedingungen für ϕ_0 aus den Randbedingungen für ϕ entnehmen

$$\phi_0(0) = 0$$

$$\phi_0(d) = \phi_{\mathrm{P}}$$

und einsetzen

$$A + B = 0$$

$$A\exp\{i\lambda d\} + B\exp\{-i\lambda d\} = \phi_{\mathrm{P}}$$

Damit ist

$$A = \frac{\phi_{\mathrm{P}}}{\exp\{i\lambda d\} + \exp\{-i\lambda d\}}\exp\{i\omega t\}$$

$$B = -\frac{\phi_{\mathrm{P}}}{\exp\{i\lambda d\} + \exp\{-i\lambda d\}}\exp\{i\omega t\}$$

einsetzen und vereinfachen gibt

$$\phi_0 = \phi_{\mathrm{P}}\frac{\sin\{\lambda x\}}{\sin\{\lambda d\}} \qquad .$$

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Lösung

Man bestimmt zunächst die Energiedichte:

$$w_{\mathrm{el}} = \vec{j} \circ \vec{E} \tag{1}$$
$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{2}$$
$$w_{\mathrm{el}} = \sigma ||\vec{E}||^2 \tag{3}$$
$$= \sigma E_0^2 \cos^2\{\omega t\} \exp\{-x\} \delta\{y\} \delta\{z\} \tag{4}$$

und erhält durch Integration über den Halbraum $x > 0$ die Wärmeenergie:

$$W_{\mathrm{el}} = \iiint\limits_{V'} w_{\mathrm{el}} \, \mathrm{d}^3 r' \tag{5}$$
$$= \iiint\limits_{V'} \sigma E_0^2 \cos^2\{\omega t\} \exp\{-x'\} \delta\{y'\} \delta\{z'\} \, \mathrm{d}^3 r' \tag{6}$$
$$= \int_0^\infty \sigma E_0^2 \cos^2\{\omega t\} \exp\{-x'\} \, \mathrm{d}x' \tag{7}$$
$$= \sigma E_0^2 \cos^2\{\omega t\} \left[-\exp\{-x'\} \right]_0^\infty \tag{8}$$
$$= \sigma E_0^2 \cos^2\{\omega t\} \tag{9}$$

Schießlich muß noch das zeitliche Mittel gebildet werden:

$$\overline{W}_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2} \sigma E_0^2 \tag{10}$$

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Lösung

Der gesamte Strom I muß über die Mantelfläche radial an das umgebende Medium abgegeben werden:

$$\vec{j} = \frac{I}{2\pi d L} \vec{e}_\rho \tag{11}$$

Da in der Aufgabe der *Radius* mit d bezeichnet war, konnte man Radius und Durchmesser leicht verwechseln, weshalb auch

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi d L} \vec{e}_\rho \tag{12}$$

als Lösung anerkannt wird!

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Lösung

Diese Aufgabe läßt sich analog zur *Aufgabe 7* aus der Klausur vom *Herbst 2001* lösen. Auf den Zylinderdeckeln steht das $\vec{B}$-Feld senkrecht und ist somit stetig.

$$\vec{n} \circ \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0 \tag{13}$$

Interessant sind nur die Flächen, an denen das Magnetfeld tangential anliegt, also der Zylindermantel. Es sei angenommen, daß das angelegte Feld parallel zu z-Achse liegt:

$$\vec{B}_0 = B_0 \cdot \vec{e}_\mathrm{z} \tag{14}$$

Dann gilt an jedem Punkt des Zylindermantels:

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{j}_s \tag{15}$$

$$= \vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_0\mu_2}\vec{B}_0 - \frac{1}{\mu_0\mu_1}\vec{B}_0\right) \tag{16}$$

Da im Vakuum gilt $\mu_1 = 1$:

$$\vec{j}_s = \frac{1}{\mu_0}\vec{n} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\vec{B}_0 - \vec{B}_0\right) \tag{17}$$

$$= \vec{e}_\rho \times \left(\frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - 1\right)\vec{e}_\mathrm{z}\right) \tag{18}$$

$$= -\left(\frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - 1\right)\right)\vec{e}_\phi \tag{19}$$

Man erhält also eine Oberflächenstromdichte der Stärke $j = \frac{B_0}{\mu_0}\left(\frac{1}{\mu_2} - 1\right)$, die um den Mantel im Kreis herumfließt.

Auflösen nach μ_2 und einsetzen der gegebenen Daten leifert:

$$\frac{1}{\mu_2} = \frac{j\mu_0}{B_0} + 1 \tag{20}$$

$$= \frac{1\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}4\pi 10^{-7}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}}{0.01\mathrm{T}} + 1 \tag{21}$$

$$\mu_2 = 1.00012566 \tag{22}$$

$$\chi_m = \mu_2 - 1 = 1.2566 \cdot 10^{-4} \tag{23}$$

Da der Umlaufsinn des Stromes nicht gegeben war, konnte das Vorzeichen nicht bestimmt werden!

Aufgabe 13 (8 Punkte)

Lösung
Wir legen die Kreisscheibe in die x-y-Ebene. Dann gilt für die Raumladungsdichte:

$$\begin{aligned} \varrho_v &= \varrho_s \delta\{z\} & (24)\\ &= \varrho_0 \sin\{\varphi\}\delta\{z\} & (25) \end{aligned}$$

Um das Potential zu bestimmen setzt man in die Integralform der Poisson-Gleichung ein:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_V \frac{\varrho_0 \sin\{\varphi'\}\delta\{z'\}}{\left|\vec{r} - \vec{r'}\right|^3} \,\mathrm{d}^3 r' & (26)\\ &= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\{\varphi'\}}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\{\varphi - \varphi'\}}} \varphi' \,\mathrm{d}\varphi' \,\mathrm{d}\rho' & (27)\\ & & (28) \end{aligned}$$

Dies allgemein zu lösen wäre etwas lästig, aber für alle Punkte auf der Geraden $\varphi = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\{\varphi'\}}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\{\varphi'\}}} \varphi' \,\mathrm{d}\varphi' \,\mathrm{d}\rho' & (29)\\ &= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_0^R \left[\frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(\varphi')}}{\rho\rho'} \right]_0^{2\pi} \varphi' \,\mathrm{d}\rho' & (30)\\ &= 0 & (31) \end{aligned}$$

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Lösung
Die Lösung dieser Aufgabe liegt in der *Kontinuitätsgleichung für elektrische Ladungen* verborgen.

$$\frac{\partial \varrho_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}, t\}}{\partial t} + \nabla \circ \vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}, t\} = \frac{\partial \varrho_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}, t\}}{\partial t} + \nabla \circ \Big(\varrho_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}, t\}\ \ \vec{v}\ \{\vec{r}, t\} \Big) = 0 \quad . \qquad (32)$$

Dort steht mit anderen Worten, dass Ladungen, welche sich bewegen nicht mehr als freie Ladungen bezeichnet werden sondern als *Strom*. Die Ladungsanordnung in der Aufgabe erzeugt ein Feld, durch welches sich die Ladungen in Bewegung setzen und somit zu Strom werden, während die freie Ladungsdichte exponentiell abnimmt, wie es in der angegebenen Lösung beschrieben wird.