Aufgabe 1

Lösung

Für den Strom im Inneren der Sonde gilt:

$$\vec{j} = \frac{I}{\pi \left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \vec{e}_z \tag{1}$$

Am Halbkugelende gilt für die Normalkomponente des Stromes:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{norm} &= \left(\vec{j} \circ \vec{e}_r\right) \vec{e}_r & (2)\\ \text{mit:} \quad \vec{e}_r &= \sin\{\theta\}\cos\{\varphi\}\vec{e}_x + \sin\{\theta\}\sin\{\varphi\}\vec{e}_y + \cos\{\theta\}\vec{e}_z & (3)\\ \Rightarrow \quad j_{norm}\vec{e}_r &= \left(\frac{I}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \cos\{\theta\}\right)\vec{e}_r & (4) \end{aligned}$$

Nach **Beispiel 4.3.1** gilt:

$$\begin{aligned} \varrho_s &= \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2}\right) j_{norm} & (5)\\ &= \left(\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1} - \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2}\right) \frac{I}{\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2} \cdot \cos\{\theta\} & (6) \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösung

Die Oberflächenladung folgt aus

$$\varrho_\mathrm{S} = \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_\mathrm{Grenze}$$

wobei der Normalenvektor von links nach rechts zeigt und der Index 1 für das Feld im Medium links der Grenzfläche und Index 2 für das Feld rechts der Grenzfläche steht. Die Dielektrische Verschiebung ist

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad .$$

Im gesamten Raum soll das elektrische Feld verschwinden. Polarisation $\vec{P} = P_0\vec{n}$ ist nur in der Platte eingeprägt. Damit gilt für die linke Grenzfläche

$$\varrho_\mathrm{S,links} = \vec{n} \circ (\vec{P}) = P_0$$

und an der rechten Grenzfläche

$$\varrho_\mathrm{S,rechts} = \vec{n} \circ (-\vec{P}) = -P_0$$

Aufgabe 3

Lösung

Mit der Volumenladungsdichte

$$\varrho_{\mathrm{V}} = \varrho_L \delta\{r' - r_0\}\delta\{z'\}$$

und dem Ansatz für das $\vec{E}$-Feld folgt auf der z-Achse

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varrho_L\delta\{r'-r_0\}\delta\{z'\}\left(-r'\cos\phi'\vec{e}_{\mathrm{x}} - r'\sin\phi'\vec{e}_{\mathrm{y}} + (z-z')\vec{e}_{\mathrm{z}}\right)}{(r'^2\cos^2\phi' + r'^2\sin^2\phi' + (z-z')^2)^{\frac{3}{2}}} r'\,\mathrm{d}z'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\phi'$$

bzw.

$$\vec{E} = \frac{\varrho_L}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\frac{(-r_0\cos\phi'\vec{e}_{\mathrm{x}} - r_0\sin\phi'\vec{e}_{\mathrm{y}} + z\vec{e}_{\mathrm{z}})}{(r_0^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} r_0\,\mathrm{d}\phi'$$

Die Integration der sin und cos-Terme über eine volle Periode gibt 0, daher:

$$\vec{E} = \frac{\varrho_L r_0}{2\epsilon_0}\frac{z}{(r_0^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

Die Bestimmungsgleichung lautet also

$$QE_{\mathrm{z}} = m_Q g$$

Aufgabe 4

Lösung

Das Magnetfeld seinerseits hängt mit der magnetischen Induktion über

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

zusammen. Nach Voraussetzung soll das magnetische Feld überall verschwinden, also muss überall

$$\vec{B} = \mu_0\vec{M} \tag{7}$$

gelten. Im Aussenraum ist die Magnetisierung 0 und somit existiert dort keine magnetische Induktion. Im Innenraum kann (7) verwendet werden

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0\vec{M} & \text{innen} \\ 0 & \text{außen} \end{cases} . \tag{8}$$

Aufgabe 5

Lösung

Die Acht wird in zwei Leiterkreisschleifen aufgeteilt. Der Strom ist in beiden Schleifen gleich, ihre Fläche ist gleich, jedoch ist der Umlaufsinn unterschiedlich. Lt. Sktipt gilt also für die beiden Leiterschleifen:

$$\vec{m}_1 = I\pi R^2 \vec{e}_z \tag{9}$$

$$\vec{m}_2 = -I\pi R^2 \vec{e}_z = -\vec{m}_1 \tag{10}$$

Diese Dipole befinden sich an den Stellen $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2 = -\vec{r}_1$. Das magnetische Vektorpotential der Anordnung ist für große Entfernungen zur Schleife

$$\vec{A} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{m}_1 \frac{1}{|\vec{r}+\vec{r}_1|^3} + (\vec{r}+\vec{r}_2)\times\vec{m}_2 \tag{11}$$

$$\simeq \frac{1}{|\vec{r}|^3}\left((\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{m}_1 - (\vec{r}+\vec{r}_1)\times\vec{m}_1\right) \tag{12}$$

$$= -2\frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{r}_1\times\vec{m}_1 \quad . \tag{13}$$

Der Vergleich zu dem allgemeinen Vektorpotenzial eines Dipols

$$\vec{A} = \frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{r}\times\vec{m}_1$$

zeigt, dass man kein allgemeines Dipolmoment für die gesamte Anordnung angeben kann.

Aufgabe 6

Lösung

Da das Magnetfeld nur eine von ρ abhängige ϕ-Komponente besitzt ist die Rotation von $\vec{H}$ in Zylinderkoordinaten

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho H_\phi)\vec{e}_\mathrm{z} = 0$$

daher würde

$$\iint\limits_S (\nabla\times\vec{H})\circ \mathrm{d}^2\vec{S} = 0$$

ergeben, unabhängig von der Form der Fläche. Zur Berechnung des Kurvenintegrals wählen wir nun eine Kreisscheibe. Das zu S zugehörige Kurvenintegral ergibt

$$\oint_{C_S} \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi r_0}\vec{e}_\phi \circ r_0 \vec{e}_\phi \,\mathrm{d}\phi' = I \qquad .$$

Das Problem besteht nun darin, dass das Vektorfeld bei $\rho = 0$ eine Polstelle besitzt, die Rotationsbildung mittels den üblichen Differenzialoperatoren also nur in einem Gebiet ohne den Ursprung erlaubt ist. Damit ist die Anwendbarkeit des klassischen Stoke'schen Satzes nicht gegeben.

Aufgabe 7

Lösung

Aus dem integralen Zusammenhang zwischen $\vec{A}$ und $\vec{j}$ folgt, dass $\vec{A}$ in z- Richtung zeigt. Wegen der Zylindersymmetrie verschwinden die Ableitungen nach z und φ. Somit kann $\vec{B}$ und damit in linearen Medien auch $\vec{H}$ nur in φ- Richtung zeigen $\vec{H} = H\{\rho\}\vec{e}_\varphi$ (Siehe auch Tutorium und Übung). Das Durchflutungsgesetz in integraler Schreibweise lautet

$$\oint\limits_{C_\mathrm{S}} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint\limits_{S} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S}$$

Die Fläche wählt man zweckmäßig quer zur Zylinderachse $\mathrm{d}^2\vec{S} = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho\vec{e}_\mathrm{z}$ und damit ist das Linienelement auf $\mathrm{d}\vec{\ell} = \rho\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$ festgelegt. Das Stromdichte lautet in Zylinderkoordinaten $\vec{j} = j_\mathrm{S}\delta\{\rho - R\}\vec{e}_\mathrm{z}$. Dabei wurde der Zylinderradius mit R bezeichnet. Mit der Heaviside Sprungfunktion Θ ergibt sich

$$2\pi\rho H\{\rho\} = 2\pi\rho j_\mathrm{S}\Theta\{\rho - R\} \quad ,$$

also

$$\vec{H} = j_\mathrm{S}\Theta\{\rho - R\}\frac{R}{\rho}\vec{e}_\varphi \quad .$$

Aufgabe 8

Lösung

Mit:

$$\vec{R} = R \cdot \vec{e}_r \tag{14}$$
$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z \tag{15}$$

$$\vec{j}_s = \varrho_v \vec{v} \tag{16}$$
$$= \varrho_v (\vec{\omega} \times \vec{R}) \tag{17}$$
$$= \varrho_v R\omega (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \tag{18}$$
$$\varrho_v = \varrho_s \cdot \delta\{r - R\} \tag{19}$$
$$\vec{j}_s = \varrho_s \delta\{r - R\} R\omega (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \tag{20}$$

mit:

$$\vec{e}_z = \cos\{\theta\}\vec{e}_r - \sin\{\theta\}\vec{e}_\theta \tag{21}$$
$$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin\{\theta\}\vec{e}_\varphi \tag{22}$$

$$\vec{j}_s = \varrho_s \delta\{r - R\} R\omega \sin\{\theta\}\vec{e}_\varphi \tag{23}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{r'} \times \vec{j}\{\vec{r'}\}\, \mathrm{d}^3 r' \tag{24}$$

In Kugelkoordinaten ist $\vec{r'} = r'\vec{e}_{r'}$

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V r'\vec{e}_{r'} \times (\varrho_s \delta\{r' - R\} R\omega \sin\{\theta'\}\vec{e}_{\varphi'})\, \mathrm{d}^3 r' \tag{25}$$
$$= \frac{1}{2} \iiint\limits_V -\vec{e}_{\theta'} \cdot (r'\varrho_s \delta\{r' - R\} R\omega \sin\{\theta'\}) r'^2 \sin\{\theta'\}\, \mathrm{d}r'\, \mathrm{d}\phi'\, \mathrm{d}\theta' \tag{26}$$
$$= -\frac{1}{2} R^4 \varrho_s \omega \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \vec{e}_{\theta'} \sin^2\{\theta'\}\, \mathrm{d}\theta'\, \mathrm{d}\varphi' \tag{27}$$

Beachte: $\vec{e}_{\theta'} = \cos\{\theta'\}\cos\{\varphi'\}\vec{e}_x + \cos\{\theta'\}\sin\{\varphi'\}\vec{e}_y - \sin\{\theta'\}\vec{e}_z$

$$\vec{m} = \pi R^4 \varrho_s \omega \int\limits_0^{\pi} \sin^3\{\theta'\}\,\mathrm{d}\theta' \cdot \vec{e}_z \tag{28}$$

$$= m \cdot \vec{e}_z \tag{29}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \tag{30}$$

Auf der z-Achse ist $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_z$. Mit $\vec{m} = m \cdot \vec{e}_z$ folgt: $\vec{A} = \vec{0}$

Aufgabe 9

Lösung
Der einfachste Zusammenhang von $\vec{j}$ und $\vec{H}$ ist über die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} \tag{31}$$

gegeben. Wegen der unendlichen Ausdehnung in x und z, gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \tag{32}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \tag{33}$$

Somit fällt obiges Kreuzprodukt zusammen:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial y} H_z \vec{e}_x - \frac{\partial}{\partial y} H_x \vec{e}_z \tag{34}$$

Da bekannt ist, daß $\vec{j} = j_x \cdot \vec{e}_x$, folgt somit, daß

$$\frac{\partial}{\partial y} H_z \cdot \vec{e}_x = j_x \cdot \vec{e}_x \tag{35}$$

gelten muß! Dies läßt sich einfach aufintegrieren:

$$H_z\{y\} = j_x \cdot y + K \tag{36}$$

An der Unterseite liefert dies $H_z\{y = 0\} = K$ und an der Oberseite folgt $H_z\{y = d\} = j_x \cdot d + K$. Mit $K = -\frac{d}{2} j_x$ ergibt sich die gewünschte Symmetrie:

$$H_z\{y\} = j \cdot y - \frac{d}{2} j_x \tag{37}$$

$$H_z\{y = 0\} = -\frac{d}{2} j_x \tag{38}$$

$$H_z\{y = d\} = \frac{d}{2} j_x \tag{39}$$

Schrumpft das Band nun bei konstantem $d \cdot j_x$ zusammen, so ergibt sich ein Sprung in der Richtung von $\vec{H}$:

$$\vec{H}\{y = 0 - \epsilon\} = -\frac{d}{2} j_x \cdot \vec{e}_z \tag{40}$$

$$\vec{H}\{y = 0 + \epsilon\} = \frac{d}{2} j_x \cdot \vec{e}_z \tag{41}$$

Aufgabe 10

Lösung

Für die Wellenzahlvektoren gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$(\vec{n} \times (\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}})) \times \vec{n} = 0 \tag{42}$$

$$\vec{n} \circ (\vec{k}_{\text{ref}} + \vec{k}_{\text{in}}) \circ \vec{n} = 0 \tag{43}$$

$$(\vec{n} \times (\vec{k}_{\text{tr}} - \vec{k}_{\text{in}})) \times \vec{n} = 0 \tag{44}$$

$$\begin{aligned} \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}\right) \circ \vec{n} &= \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}\right)^2} \circ \vec{n} \\ &= \sqrt{k_0^2(\varepsilon_2\mu_2 - \varepsilon_1\mu_1) + \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}\right)^2} \circ \vec{n} \end{aligned} \tag{45}$$

wobei die Vakuumwellenzahl $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ verwendet wird und $k_1 = k_0 n_1, k_2 = k_0 n_2$ mit den Brechzahlen $n_1^2 = \varepsilon_1\mu_1$, $n_2^2 = \varepsilon_2\mu_2$ ist. Hier ist $\vec{n} = \vec{e}_{\text{z}}$. Aus der Darstellung der transmittierten Welle resultiert mit Vergleich

$$\vec{k}_{\text{tr}} \circ \vec{r} = k_{\text{y}} y + k_{\text{z}} z$$

dass gilt

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} + k_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

und somit

$$\begin{aligned}(\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}) \times \vec{n} &= k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} && (46)\\ \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}}\right) \circ \vec{n} &= k_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}} \quad . && (47)\end{aligned}$$

Daraus folgt für die Tangentialkomponenten der einfallenden und der reflektierten Welle

$$(\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{in}})) \times \vec{n} = (\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{ref}})) \times \vec{n} = (\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{tr}})) \times \vec{n} = k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} \quad . \tag{48}$$

Die Normalkomponente von $\vec{k}_{\mathrm{in}}$ resultiert aus (45) mit umstellen in unmagnetischen Medien zu

$$\begin{aligned}\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}} &= \sqrt{k_1^2 - k_2^2 + \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}}\right)^2} = \sqrt{k_0^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + k_{\mathrm{z}}^2} && (49)\\ &= \sqrt{k_1^2 - \left\|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}\right\|^2} = \sqrt{k_0^2\varepsilon_1 - k_{\mathrm{y}}^2} \quad .\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich mit 43 also

$$\begin{aligned}\vec{k}_{\mathrm{in}} &= k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} + \sqrt{k_0^2\varepsilon_1 - k_{\mathrm{z}}^2}\vec{e}_{\mathrm{z}} && (50)\\ \vec{k}_{\mathrm{ref}} &= k_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} - \sqrt{k_0^2\varepsilon_1 - k_{\mathrm{z}}^2}\vec{e}_{\mathrm{z}} && (51)\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Lösung

Durch Bildung der Rotation des Induktionsgesetz $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ folgt

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B}$$

$$\nabla(\nabla \circ \vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0}\nabla(\nabla \circ (\vec{D} - \vec{P})) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B}$$

keine freien Ladungen erlaubt: $\nabla \circ \vec{D} = 0$

$$-\frac{1}{\epsilon_0}\nabla(\nabla \circ \vec{P}) - \Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B}$$

Die Divergenz der Polarisation verschwindet auch, da keine (statische) Polarisationsraumladungsdichte vorhanden ist: $\varrho_{\mathrm{P}} = -\nabla \circ \vec{P} = 0$, aber sehr wohl eine sich mit der Zeit änderende elektrische Dipoldichte, die dann zu dem Polarisationsstrom $\vec{j}_{\mathrm{Pol}} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$ führt.

$$-\Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B}$$

Einsetzen von $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$

$$-\Delta\vec{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{H} - \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{M} \qquad ,$$

wobei $\vec{j}_{\mathrm{magn}} = \nabla \times \vec{M}$ null ist. Das Ampere-Gesetz lautet

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{\mathrm{frei}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \sigma\vec{E} \qquad ,$$

wobei $\vec{j}_{\mathrm{frei}}$ und σ null sind. Einsetzen von $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ gibt

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \vec{j}_{Pol}$$

Damit folgt

$$\Delta\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}_{Pol}$$