Aufgabe 1 (6 Punkte)

Im Leerlauf kann angenommen werden, dass bei Vernachlässigung von Reibung keine Kraft aufgebracht wird. Damit ist die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad .$$

Die Geschwindigkeit des Rotors $\vec{v}$ ist gleich $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Dabei kann die Geschwindigkeit am Umfang genommen werden, wo sich auch die Wicklungen befinden. Alle Richtungen sollen aufeinander senkrecht stehen. Damit fallen die Kreuzprodukte weg und es resultiert

$$B = \frac{E}{\omega R} = -\frac{1}{40 \cdot 3000} \frac{\mathrm{V\,min}}{\mathrm{m} \cdot \mathrm{cm}} = 0,05 \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} \quad ,$$

wobei das Vorzeichen von B nicht bestimmt ist, da ja keine Richtung angegeben wird.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Aus den Maxwellgleichungen ergibt sich der Zusammenhang

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Das hier angegebene elektrische Feld hat die Rotation

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{E_0}{\rho}\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

und damit folgt für das B-Feld

$$\vec{B} = \vec{B}\{t_0\} - \frac{E_0}{\rho}(t - t_0)\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

und das H-Feld

$$\vec{H} = \vec{H}\{t_0\} - \frac{E_0}{\mu_0 \rho}(t - t_0)\vec{e}_{\mathrm{z}} \quad .$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Das magnetische Moment einer ebenen Leiterschleife ergibt sich aus dem Produkt von Strom und Fläche der Schleife. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a hat die Fläche $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$. Damit resultiert für die Leiterschleife in der $x-y$-Ebene, bei der wie in Abbildung 1 der Strom mathematisch positiv um den Schwerpunkt läuft, das magnetische Dipolmoment

$$\vec{m} = \frac{1}{4}\sqrt{3}a^2 I\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

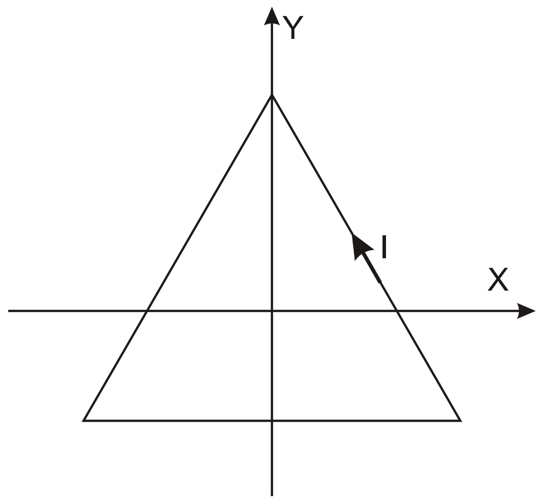


Abbildung 1: Leiterschleife in der $x-y$-Ebene.

Das magnetische Vektorpotenzial in großer Entfernung zur Leiterschleife ergibt sich direkt aus dem Dipolmoment zu

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= \mu_0\frac{\sqrt{3}}{16\pi}I\frac{a^2}{\rho^2+z^2}\vec{e}_\Phi \quad ,\end{aligned}$$

wobei ρ den Abstand von der z-Achse und $\vec{e}_\Phi$ den Azimut in Zylinderkoordinaten bezeichnet.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Die mechanische Leistungsdichte eines elektromagnetischen Feldes resultiert entweder aus dem Zusammenhang $\vec{j}\circ\vec{E}$ oder aus den Maxwellgleichungen im Zusammenhang mit der Kontinuitätsgleichung für die Energiedichte:

$$\frac{\partial}{\partial t}w+\nabla\circ\vec{S}+\vec{j}\circ\vec{E}=0$$

Da hier keine Aussage über die Stromdichte gemacht wurde, muss der zweite Weg beschritten werden.
Direkt aus $\vec{E}$ kann das Feld $\vec{B}$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} &= -\nabla\times\vec{E} \\ &= -E_0 i\beta\exp\{i(\beta z-\omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y} \quad ,\end{aligned}$$

also mit $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

$$\vec{H} = E_0 \frac{\beta}{\omega\mu_0} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

Damit stehen die erforderlichen Größen für die Kontinuitätsgleichung der Energie zur Verfügung. Aus $\vec{H}$ und $\vec{E}$ folgen die Energiedichten der Felder

$$\begin{aligned} w_\mathrm{el} = \epsilon_0 \qquad & \frac{1}{2} E_0^2 \exp\{i2(\beta z - \omega t)\} \\ w_\mathrm{magn} = \frac{\beta^2}{\mu_0 \omega^2} \qquad & \frac{1}{2} E_0^2 \exp\{i2(\beta z - \omega t)\} \end{aligned}$$

und der Poyntingvektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0^2 \frac{\beta}{\omega\mu_0} \exp\{i2(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{z} \quad .$$

Aus der Dispersionsrelation ergibt sich $\beta^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$, so dass die elektromagnetische Energiedichte

$$w = \epsilon_0 E_0^2 \exp\{i2(\beta z - \omega t)\}$$

resultiert und damit

$$-\vec{j} \circ \vec{E} \;\; = \;\; \frac{\partial}{\partial t} w + \nabla \circ \vec{S} = 0$$

wird. Die mechanische Leistungsdichte verschwindet, weil es keinen Strom freier Ladungsträger parallel zum elektrischen Feld gibt.
Der Energietransport durch eine Fläche O ergibt sich aus dem Poyntingvektor zu

$$P = \iint\limits_O \vec{S} \circ \, \mathrm{d}^2\vec{O}$$

und resultiert hier zu 0, weil $\vec{S} = S\vec{e}_\mathrm{z}$ und das Oberflächenelement $\mathrm{d}^2\vec{O} = \mathrm{d}^2 O \vec{e}_\mathrm{x}$ senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Die Lorentzeichung lautet

$$\nabla \circ \vec{A} + \epsilon\mu\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_\mathrm{el} = 0 \quad .$$

Die Raumladung ergibt sich in Lorentzeichung aus der entkoppelten Wellengleichung

$$\Delta\Phi_\mathrm{el} - \epsilon\mu\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_\mathrm{el} = -\frac{\varrho}{\epsilon\epsilon_0} \quad .$$

Es bleibt also zunächst das skalare elektrische Potenzial aus der Lorentzeichung zu berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = 0 \quad .$$

Das magnetische Vektorpotenzial ist Coulomb- geeicht und damit resultiert ein zeitkonstantes skalares elektrisches Potenzial

$$\Phi_{\mathrm{el}}\{t\} = \Phi_0 \quad .$$

Da das skalare Potenzial zeitunabhängig ist, kann gemäß der Wellengleichung auch die Raumladungsdichte nicht zeitabhängig sein:

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}} = -\frac{\varrho}{\epsilon\epsilon_0} \quad .$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Welle unterliegt der Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \quad .$$

Anwendung ergibt

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \beta^2 - \omega^2\epsilon_0\mu_0 = 0$$

und damit für β

$$\begin{aligned}\beta &= \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2}{\omega^2\epsilon_0\mu_0}} \\ &= \frac{\omega}{c_0}\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\mathrm{c}}}{\omega}\right)^2}\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$c_0^2 = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}$$

und

$$\omega_{\mathrm{c}}^2 = \left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2\right)c_0^2 \quad .$$

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich aus

$$c_{\mathrm{phase}} = \frac{1}{\frac{\beta}{\omega}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\mathrm{c}}}{\omega}\right)^2}} \quad .$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Im ladungsfreien Gebiet gilt

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial x} E_{\mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial y} E_{\mathrm{y}} + \frac{\partial}{\partial z} E_{\mathrm{z}} = 0 \qquad ,$$

daher muss auch die Welle diese Bedingung erfüllen. Einsetzen liefert:

$$(ik_{\mathrm{x}} E_{\mathrm{x},0} - \alpha E_{\mathrm{y},0}) \exp\{-\alpha y\} \exp\{i(k_{\mathrm{x}} x + \beta z - \omega t)\} = 0$$

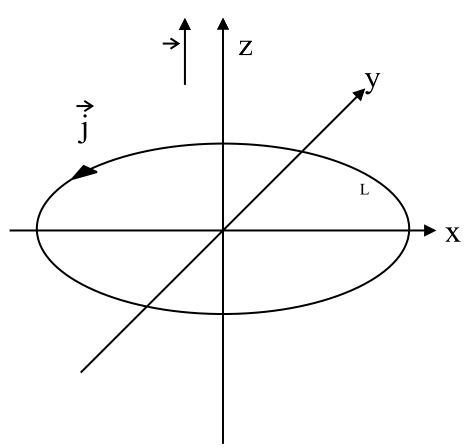
Diese Bedinungung muss für alle Variablen gleichzeitig erfüllt sein, daher folgt

$$E_{\mathrm{y},0} = \frac{ik_{\mathrm{x}}}{\alpha} E_{\mathrm{x},0} \qquad .$$

Daher ist die y-Komponente der Welle um $\frac{\pi}{2}$ gegenüber der x-Komponente phasenverschoben. Es muss daher eine links drehende, im Allgemeinen elliptische Polarisation vorliegen.

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Skizze



Die Stromdichte berechnet sich aus

$$\vec{j} = \rho_{\mathrm{V}} \vec{v} \qquad .$$

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ berechnet sich aus

$$\vec{v} = \omega \vec{e}_{\mathrm{z}} \times r' \vec{e}_{\mathrm{r}} = \omega r' \vec{e}_{\varphi}$$

Die Volumenladungsdichte ϱ_{V} ist

$$\varrho_{\mathrm{V}} = \varrho_{\mathrm{L}}\delta\{r' - R\}\delta\{z'\}$$

daher lautet die resultierende Stromdichte

$$\vec{j}_{\mathrm{V}} = \varrho_{\mathrm{L}}\omega r'\delta\{r' - R\}\delta\{z'\}\vec{e}_{\varphi} \qquad .$$

Das magnetische Diplolmoment berechnet sich aus

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\infty}^{\infty} \vec{r'} \times \vec{j}_{\mathrm{V}}\{\vec{r'}\}\,\mathrm{d}^3r'$$

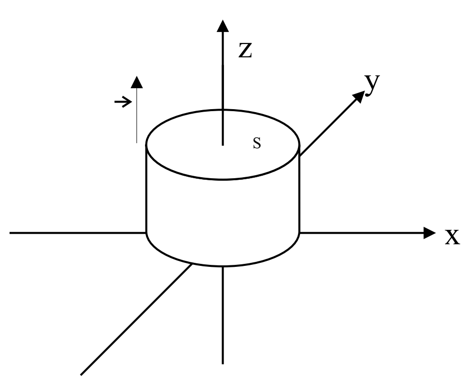
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{L}}\omega\iiint\limits_{\infty}^{\infty} r'^2\delta\{r' - R\}\delta\{z'\}\,\mathrm{d}^3r'\,\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\varrho_{\mathrm{L}}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} r'^2\delta\{r' - R\}\delta\{z'\}r'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}z'\,\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

$$\vec{m} = \pi\omega R^3\varrho_{\mathrm{L}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

Aufgabe 9 (7 Punkte)

Skizze



Auf der Mantelfläche des Zylinders ist das außere Feld tangential und setzt sich daher stetig fort, d.h.

$$\vec{E}_{\mathrm{aussen}} \circ \vec{e}_z = \vec{E}_{\mathrm{innen}} \circ \vec{e}_z \qquad .$$

Auf der Stirnfläche macht das $\vec{D}$-Feld auf Grund der Oberflächenladung einen Sprung um ϱ_S. Es gilt also

$$\vec{D}_{\text{aussen}} \circ \vec{e}_z - \vec{D}_{\text{innen}} \circ \vec{e}_z = |\varrho_S|$$

bzw.

$$\varepsilon_0 \vec{E}_{\text{aussen}} \circ \vec{e}_z - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_{\text{innen}} \circ \vec{e}_z = |\varrho_S|$$

oder

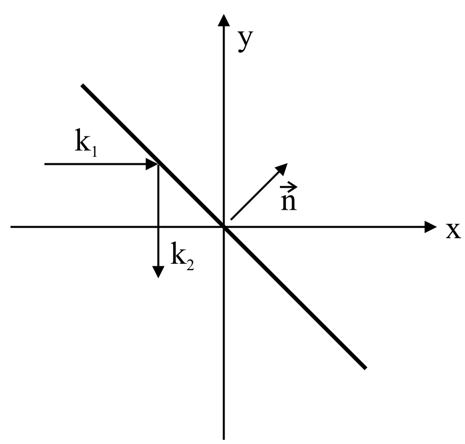
$$\varepsilon_1 = \left(1 - \frac{|\varrho_S|}{\varepsilon_0 E_0}\right) \qquad .$$

Ein physikalisch sinnvolles ε_1 ist größer 1. Daher ist

$$\varepsilon_1 = \left(1 + \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}}{8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \cdot 1 \, \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}\right) = 2 \qquad .$$

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Skizze



$$r_{\text{TE}} = \frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} - \sqrt{k_{\text{tr}}^2 - k_{\text{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})^2}}{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} + \sqrt{k_{\text{tr}}^2 - k_{\text{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} k_0 - \sqrt{k_0^2 n_2^2 - k_0^2 + \frac{1}{2} k_0^2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} k_0 - \sqrt{k_0^2 n_2^2 - k_0^2 + \frac{1}{2} k_0^2}} = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$$

$$r_{\text{TM}} = \frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} - \frac{1}{n_2^2} \sqrt{k_{\text{tr}}^2 - k_{\text{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})^2}}{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} + \frac{1}{n_2^2} \sqrt{k_{\text{tr}}^2 - k_{\text{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})^2}} = \frac{\frac{n_2^2}{\sqrt{2}} k_0 - \sqrt{k_0^2 n_2^2 - k_0^2 + \frac{1}{2} k_0^2}}{\frac{n_2^2}{\sqrt{2}} k_0 - \sqrt{k_0^2 n_2^2 - k_0^2 + \frac{1}{2} k_0^2}} = \frac{4 - \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}}$$

Die reflektierte Welle ergibt sich aus Superposition der einzelnen Anteile.

$$E_{\text{z,ref}} = r_{\text{TE}} E_{\text{z,in}} + r_{\text{TM}} Z_0 H_{\text{z,in}} = (r_{\text{TE}} + r_{\text{TM}}) E_{\text{z,in}}$$

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Es gilt

$$\Delta\phi_{\mathrm{M}} = \nabla \circ \vec{M} \qquad ,$$

wobei die Divergenz

$$\nabla \circ \vec{M} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^4}{R_2^2}M_0\right) = -\frac{4r}{R_2^2}M_0$$

ist. Damit muss

$$\Delta\phi_{\mathrm{M}} = -\frac{4r}{R_2^2}M_0$$

im Bereich $R_1 \leq r \leq R_2$ gelöst werden:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi_{\mathrm{M}}\right) = -\frac{4r}{R_2^2}M_0$$

$$\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi_{\mathrm{M}}\right) = -\frac{r^4}{R_2^2}M_0 + C_1$$

$$\phi_{\mathrm{M}} = -\frac{r^3}{3R_2^2}M_0 - \frac{C_1}{r} + C_2$$

Im Bereich $0 \leq r \leq R_1$ gilt der gleiche Ansatz, jedoch verschwindet die Divergenz. Daher lautet der Ansatz für ϕ_{M}

$$\phi_{\mathrm{M}} = -\frac{C_3}{r} + C_4$$

Da das Potenzial endlich bleiben muss, gilt $C_3 = 0$. Weiterhin soll das Potenzial bei $r = R_1$ verschwinden, also ist C_4 ebenfalls 0. Jetzt kann man die Lösung für den Bereich $R_1 \leq r \leq R_2$ angeben. Es muss gelten

$$\phi_{\mathrm{M}}\{R_1\} = -\frac{R_1^3}{3R_2^2}M_0 - \frac{C_1}{R_1} + C_2 = 0$$

bzw.

$$\left.\frac{\partial\phi_{\mathrm{M}}}{\partial r}\right|_{r=R_1} = -\frac{R_1^2}{R_2^2}M_0 + \frac{C_1}{R_1^2} = 0$$

oder

$$C_1 = \frac{R_1^4}{R_2^2}M_0 \quad , \quad C_2 = \frac{4R_1^3}{3R_2^2}M_0$$

Für ϕ_{M} ergibt sich dann:

$$\phi_{\mathrm{M}} = -\frac{r^3}{3R_2^2}M_0 - \frac{R_1^4}{R_2^2 r}M_0 + \frac{4R_1^3}{3R_2^2}M_0$$

und für $\vec{H}$

$$\vec{H} = -\nabla\phi_{\mathrm{M}} = \left(\frac{r^2}{R_2^2} - \frac{R_1^4}{R_2^2 r^2}\right)M_0\vec{e}_{\mathrm{r}}$$

Aufgabe 12 (5 Punkte)

Die Energie der Andordung ist

$$W_{\text{pot}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|}\bigg|_{j\neq k} \qquad ,$$

$$W_{\text{pot}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_k|} \right)$$

$$W_{\text{pot}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right)$$

$$W_{\text{pot}} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{2a} \right) = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{5}{a}$$