Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zwei Ladungen Q die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\vec{r}_1 = a\vec{e}_\mathrm{y}$ und $\vec{r}_2 = -a\vec{e}_\mathrm{y}$ befinden, bewegen sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T}\vec{e}_\mathrm{z}$ um den Ursprung. Welches (mittlere) magnetische Feld resultiert auf der z-Achse ?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Drei Ladungen Q seien bei $\vec{r}_1 = a\vec{e}_\mathrm{y}, \vec{r}_2 = a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{x} - a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{y}, \vec{r}_3 = -a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{x} - a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{y}$ angeordnet. Skizzieren Sie die Feldverteilung (Feldlinien) für $Q > 0$ in der x-y-Ebene.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Im Bereich $x > 0$ in der x-z-Ebene sei eine unendlich dünne Metallplatte mit Potenzial $V = V_0$ vorhanden. In der y-z-Ebene ist bei $y > 0$ eine weitere Platte mit Potenzial $V = 0$ vorhanden. Skizzieren Sie die Anordnung in der x-y-Ebene. Berechnen Sie das Potenzial im II. bis IV. Quadranten! Sie können annehmen, dass das Potenzial nicht vom Abstand zur z-Achse abhängt.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Im freien Raum befinde sich auf eine Kreisscheibe mit Radius a, die die Flächenladung $\varrho_S = \varrho_0 \cos\phi$ trägt. Geben Sie den differenziellen und integralen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potenzial und Ladungsdichte an. Berechnen Sie das Potenzial in der Kreisscheibe entlang $\phi = \frac{\pi}{2}$.
Hinweis:

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{f(x)}$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass ein in ein Volumen V hineinfließender Strom J die darin befindliche Ladung Q gemäß

$$J = \frac{dQ}{dt}$$

ändert. Gehen Sie dabei von einer Stromdichteverteilung $\vec{j}\{\vec{r}\}$ aus.

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a liegt in der x-y-Ebene (Schwerpunkt im Ursprung). Entlang den Kanten fließt im Uhrzeigersinn der Strom I. Wie ist das magnetische Feld $\vec{B}\{\vec{r}\}$ für $|\vec{r}| \gg a$?

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Im homogenen Raum befinden sich auf allen Schnittpunkten der Kugeloberflächen $|\vec{r}| = na \quad , n \in \mathbb{N}$ mit den kartesischen Koordinatenachsen die Ladungen $Q_n = Q_0 \frac{1}{n}$. Wie ist das elektrische Potenzial $V\{\vec{r}\}$ bei $\vec{r} = \vec{0}$, wenn $\lim\limits_{|\vec{r}| \to \infty} V\{\vec{r}\} = 0$ gilt?

Hinweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{7\pi^4}{27}$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Zerlegen Sie die monochromatische Welle

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = E_0 (1, 1+i, 0)^T \exp\{i(kz - \omega t)\}, E_0 \in \mathbb{R}$$

in zirkular polarisierte Anteile.

Aufgabe 9 (11 Punkte)

Ein unendlich langer Leiter mit Radius a, Leitfähigkeit σ und Dielektrizitätszahl ϵ, liegt entlang der z-Achse. In dem Leiter fließt ein Strom mit der homogenen Stromdichte

$\vec{j} = j(t)\vec{e_z}$. Das Magnetfeld außerhalb des Leiters lautet in Zylinderkoordinaten

$$\vec{B}\{\vec{r}, t\} = B_0 \frac{a}{\rho} \Theta(t) \vec{e_\Phi} \quad ,$$

wobei $\Theta(t)$ die Heaviside-Sprungfunktion ist. Geben Sie den differentiellen und integralen Zusammenhang zwischen Stromdichte und Magnetfeld an (Maxwell-Gleichungen). Wie lautet der Strom J, der das Magnetfeld erzeugt? Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld auf der z-Achse.
Hinweise:

- Vernachlässigen Sie Diffusionsströme $\vec{j_R}$.
- Der Lösungsweg führt über eine zeitliche Differenzialgleichung

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Zwei lineare homogene isotrope Medien stoßen bei $x = 0$ aneinander. Im Bereich $x \leq 0$ existiert das elektrische Feld

$$E_- = E_1 \exp\left\{i\left(k_\mathrm{h} x - \omega t\right)\right\} \vec{e}_\mathrm{z} + E_2 \exp\left\{-i\left(k_\mathrm{r} x + \omega t\right)\right\} \vec{e}_\mathrm{z}$$

im Bereich $x > 0$ lautet das Feld

$$E_+ = E_3 \exp\left\{i\left(k_\mathrm{t} x - \omega t\right)\right\} \vec{e}_\mathrm{z}$$

wobei $E_3 = 0.5 E_1$ sein soll. Wie groß ist die Amplitude E_2?

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Gegeben ist ein Stromfaden der Länge ℓ im freien Raum. An seinen Enden wird die Ladung $Q\{t\} = \pm Q_0 \exp\{i\omega t\}$ gemessen. Welcher Strom fließt im Faden?

Aufgabe 12 (5 Punkte)

In einem inhomogenen Dielektrikum mit Dielektrizitätszahl $\varepsilon\{r\} = \varepsilon\,(\sin\{kr\} + 1)$ wird das konstante elektrische Feld $\vec{E} = E_0\vec{e}_\mathrm{z}$ gemessen. Berechnen Sie die Verteilung der freien Ladungen, wobei r den Abstand vom Ursprung angibt.

Aufgabe 13 (5 Punkte)

Auf der Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei Medien mit relativen Permeabilitäten μ_1, μ_2 fließt der Flächenstrom

$$\vec{j}_\mathrm{S} = j_0 \cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \sin\{\omega t\}\, \vec{e}_\mathrm{x} \quad .$$

Das magnetische Feld $\vec{H}_1$ im Bereich $z < 0$ ist für den Fall gesucht, dass es im anderen Bereich das Feld $\vec{H}_2 = H_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}$ herrscht. Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen für die magnetischen Felder an der Grenzfläche an.

Aufgabe 14 (8 Punkte)

Welche Stromverteilung erzeugt im freien Raum das Lorentz-geeichte magnetische Vektorpotenzial

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \frac{l}{r} \exp\{i\,(k \cdot r - \omega t)\}\, \vec{e}_\mathrm{z} \quad ,$$

wobei r den Abstand zum Ursprung bezeichnet?
Hinweis: Formen Sie den Vektor $\vec{e}_\mathrm{z}$ nicht in Kugelkoordinaten um!

Aufgabe 15 (8 Punkte)

Eine elektromagnetische Welle hat das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \sinh\left\{\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{\pi\frac{z}{b} - \omega t\right\} \vec{e}_\mathrm{y}$$

und breitet sich in einem Medium mit Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ aus. Welches ist ihre Ausbreitungsrichtung? Wie lauten Gruppen- und Phasengeschwindigkeit? Berechnen Sie die Dispersionsrelation der Welle.