Aufgabe 1

Zwei Ladungen Q die sich zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $\vec{r}_1 = a\vec{e}_\text{y}$ und $\vec{r}_2 = -a\vec{e}_\text{y}$ befinden, bewegen sich gleichförmig mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T}\vec{e}_\text{z}$ um den Ursprung. Welches (mittlere) magnetische Feld resultiert auf der z-Achse ?

Lösung

Die Volumenladungsdiche lautet

$$\varrho = Q\delta\{\rho - a\}\frac{1}{a}\left(\delta\{\phi - \omega t\} + \delta\{\phi - \omega t - \frac{\pi}{2}\}\right)\delta\{z\}$$

Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad ,$$

wobei $\vec{r} = a\vec{e}_\rho$ ist. Damit folgt

$$\vec{v} = \omega a\vec{e}_\phi$$

und

$$\vec{j} = Q\omega\delta\{\rho - a\}\left(\delta\{\phi - \omega t\} + \delta\{\phi - \frac{\pi}{2} - \omega t\}\right)\delta\{z\}\vec{e}_\phi \qquad .$$

Der mittlere Strom ist

$$\bar{\vec{j}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q\omega\delta\{\rho - a\}\left(\delta\{\phi - \omega t\} + \delta\{\phi - \frac{\pi}{2} - \omega t\}\right)\delta\{z\}d\phi\vec{e}_\phi$$

$$= \frac{Q\omega}{\pi}\delta\{\rho - a\}\delta\{z\}\vec{e}_\phi = \frac{2Q}{T}\delta\{\rho - a\}\delta\{z\}\vec{e}_\phi \qquad .$$

Letzteres gilt, weil man ωt auf $0 \leq \omega t \leq 2\pi$ einschränken muss. Im Skript ist das $\vec{B}$-Feld angegeben, daraus folgt

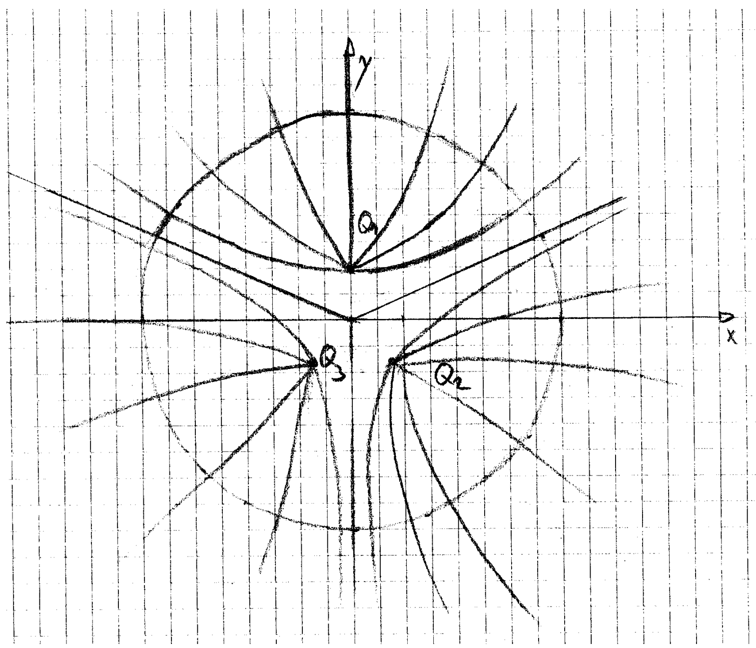
$$\vec{H} = \frac{Qa^2}{T(z^2 + a^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

Aufgabe 2

Drei Ladungen Q seien bei $\vec{r}_1 = a\vec{e}_\mathrm{y}, \vec{r}_2 = a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{x} - a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{y}, \vec{r}_3 = -a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{x} - a\frac{1}{2}\sqrt{2}\vec{e}_\mathrm{y}$ angeordnet. Skizzieren Sie die Feldverteilung (Feldlinien) für $Q > 0$ in der x-y-Ebene.

Lösung

So sieht es in etwa aus:

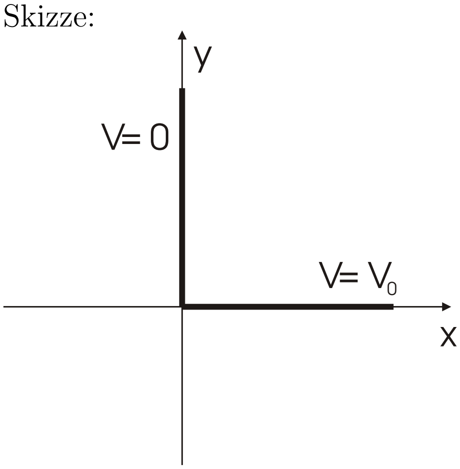


Aufgabe 3

Im Bereich $x > 0$ in der x-z-Ebene sei eine unendlich dünne Metallplatte mit Potenzial $V = V_0$ vorhanden. In der y-z-Ebene ist bei $y > 0$ eine weitere Platte mit Potenzial $V = 0$ vorhanden. Skizzieren Sie die Anordnung in der x-y-Ebene. Berechnen Sie das Potenzial im II. bis IV. Quadranten! Sie können annehmen, dass das Potenzial nicht vom Abstand zur z-Achse abhängt.

Lösung

Skizze:



$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V = 0$$

daher

$$V = \frac{2V_0}{3\pi}(\phi - \frac{\pi}{2}) \qquad .$$

Aufgabe 4

Im freien Raum befinde sich auf eine Kreisscheibe mit Radius a, die die Flächenladung $\varrho_S = \varrho_0 \cos\phi$ trägt. Geben Sie den differenziellen und integralen Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potenzial und Ladungsdichte an. Berechnen Sie das Potenzial in der Kreisscheibe entlang $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Hinweis:

$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{f(x)}$$

Lösung

Der differenzielle Zusammenhang ist die Poisson-Gleichung

$$\Delta V = -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \qquad ,$$

der integrale Zusammenhang ist das Coulomb-Integral

$$V\{\vec{r}\} = \iiint\limits_{\mathrm{Vol}} \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \qquad .$$

Die Volumenladungsdichte lautet

$$\varrho = \varrho_0 \cos\phi\, \delta\{z\} \qquad .$$

Damit ist die integrale Schreibweise besser geeignet, daher

$$V\{\vec{r}\} = \frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0}\iiint\limits_{\mathrm{Vol}} \frac{\cos\phi\,\delta\{z\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' = \frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{(x-\rho\cos\phi)^2+(y-\rho\sin\phi)^2+z^2}}$$

entlang $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$V(0,y,0) = \frac{\varrho_0}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}\frac{\cos\phi\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{y^2+\rho^2-2\rho y\sin\phi}} = \frac{-\varrho_0}{4\pi\epsilon_0 y}\int_0^a \left.\sqrt{y^2-2\rho y\sin\phi+\rho^2}\right|_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\rho = 0$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass ein in ein Volumen V hineinfließender Strom J die darin befindliche Ladung Q gemäß

$$J = \frac{dQ}{dt}$$

ändert. Gehen Sie dabei von einer Stromdichteverteilung $\vec{j}\{\vec{r}\}$ aus.

Lösung

Die Kontinuitäsgleichung

$$\nabla\circ\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

wird über das Volumen V integriert

$$\iiint\limits_V \left(\nabla\circ\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) d^3r' = 0 \quad . \tag{2}$$

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes lässt sich das Volumenintegral in ein eine Integration über die Volumenoberfläche C_V umwandeln.

$$\iiint\limits_V \left(\nabla\circ\vec{j}\right) d^3r' = \int\limits_{C_V} \vec{j}\circ d^2\vec{S} \tag{3}$$

Da der Strom J in das Volumen V hineinfließt, gilt

$$\int_{C_V} \vec{j} \circ d^2\vec{S} = -J \tag{4}$$

Das Volumenintegral über die Ladungsdichte ρ entspricht der eingeschlossenen Ladung Q.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 r' = \frac{\partial}{\partial t} Q \tag{5}$$

Es folgt

$$J = \frac{\partial}{\partial t} Q \quad . \tag{6}$$

Aufgabe 6

Ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge a liegt in der x-y-Ebene (Schwerpunkt im Ursprung). Entlang den Kanten fließt im Uhrzeigersinn der Strom I. Wie ist das magnetische Feld $\vec{B}\{\vec{r}\}$ für $|\vec{r}| \gg a$?

Lösung

Das magnetische Dipolmoment eines ebenen geschlossenen Stromfadens $\vec{m}$ lautet

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{l}\{\vec{r}\} \tag{7}$$

und steht senkrecht auf der durch den Strom I definierten Fläche S_C.
Es gilt

$$\vec{m} = m \cdot (-\vec{e_z}) \quad , \tag{8}$$

denn der Strom I fließt im Urzeigersinn.

$$m = |I| \cdot S_C = |I| \cdot \frac{g \cdot h}{2} = |I| \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \tag{9}$$

$$\vec{m} = -|I| \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \cdot \vec{e_z} \tag{10}$$

Für $|\vec{r}| \gg a$ folgt

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\left(\vec{m} \circ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \tag{11}$$

$$= \frac{\mu_0 I \sqrt{3} a^2}{16\pi} \cdot \frac{\vec{e_z} - 3\left(\vec{e_z} \circ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}}{|\vec{r}|^3} \tag{12}$$

Aufgabe 7

Im homogenen Raum befinden sich auf allen Schnittpunkten der Kugeloberflächen $|\vec{r}| = na \quad , n \in \mathbb{N}$ mit den kartesischen Koordinatenachsen die Ladungen $Q_n = Q_0 \frac{1}{n}$.
Wie ist das elektrische Potenzial $V\{\vec{r}\}$ bei $\vec{r} = \vec{0}$, wenn $\lim_{|\vec{r}| \to \infty} V\{\vec{r}\} = 0$ gilt?

Hinweise:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{7\pi^4}{27}$$

Lösung

Das Potenzial unendlich vieler Punktladungen Q_i an den Orten $\vec{r_i}$ ergibt sich durch Superposition zu

$$V\{\vec{r}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r_i}|} \tag{13}$$

Laut Aufgabenstellung gibt es jeweils 6 Punktladungen mit $|\vec{r_i}| = a_i$ und es soll das Potenzial lediglich bei $\vec{r} = \vec{0}$ berechnet werden.

$$V\{\vec{r} = \vec{0}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{6 \cdot Q_i}{4\pi\epsilon_0 a i} = \frac{6}{4a\pi\epsilon_0} Q_0 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \tag{14}$$

$$= \frac{\pi}{4a\epsilon_0} Q_0 \tag{15}$$

Aufgabe 8

Zerlegen Sie die monochromatische Welle

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = E_0 (1, 1+i, 0)^T \exp\{i(kz - \omega t)\}, E_0 \in \mathbb{R}$$

in zirkular polarisierte Anteile.

Lösung

Die gegebene Welle

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = E_0 \cdot (1, 1+i, 0)^T \exp\{i(kz - \omega t)\}, E_0 \in \mathbb{R} \tag{16}$$

ist elliptisch polarisiert und kann in zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Anteile zerlegt werden.

$$\vec{E_L}\{\vec{r},t\} = E_L \cdot (1,i,0)^T \exp\{i(kz-\omega t)\}, E_L \in \mathbb{C} \tag{17}$$
$$\vec{E_R}\{\vec{r},t\} = E_R \cdot (1,-i,0)^T \exp\{i(kz-\omega t)\}, E_R \in \mathbb{C} \tag{18}$$
$$\vec{E}\{\vec{r},t\} = \vec{E_L}\{\vec{r},t\} + \vec{E_R}\{\vec{r},t\} \tag{19}$$
$$\tag{20}$$

Dabei bezeichnen $\vec{E_L}$,$\vec{E_R}$ eine links- bzw. rechtszirkular polarisierte Welle.
Aus

$$1 \cdot E_L + 1 \cdot E_R = 1 \cdot E_0 \tag{21}$$
$$i \cdot E_L + (-i) \cdot E_R = (1+i) \cdot E_0 \tag{22}$$

folgt

$$E_L = E_0 \frac{2-i}{2} \tag{23}$$
$$E_R = E_0 \frac{i}{2} \quad . \tag{24}$$
$$\tag{25}$$

Das Ergebnis lautet also

$$\vec{E_L}\{\vec{r},t\} = E_0 \cdot \left(\frac{2-i}{2}, \frac{2i+1}{2}, 0\right)^T \exp\{i(kz-\omega t)\} \tag{26}$$
$$\vec{E_R}\{\vec{r},t\} = E_0 \cdot \left(\frac{i}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)^T \exp\{i(kz-\omega t)\} \quad . \tag{27}$$
$$\tag{28}$$

Aufgabe 9

Ein unendlich langer Leiter mit Radius a, Leitfähigkeit σ und Dielektrizitätszahl ϵ, liegt entlang der z-Achse. In dem Leiter fließt ein Strom mit der homogenen Stromdichte $\vec{j} = j(t)\vec{e_z}$. Das Magnetfeld außerhalb des Leiters lautet in Zylinderkoordinaten

$$\vec{B}\{\vec{r},t\} = B_0 \frac{a}{\rho} \Theta(t) \vec{e_\Phi} \quad ,$$

wobei $\Theta(t)$ die Heaviside-Sprungfunktion ist. Geben Sie den differentiellen und integralen Zusammenhang zwischen Stromdichte und Magnetfeld an (Maxwell-Gleichungen). Wie

lautet der Strom J, der das Magnetfeld erzeugt? Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld auf der z-Achse.
Hinweise:

- Vernachlässigen Sie Diffusionsströme $\vec{j_R}$.
- Der Lösungsweg führt über eine zeitliche Differenzialgleichung

Lösung
In linearer isotroper leitfähiger Materie gilt

$$\left(\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}\right) = \epsilon\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \sigma \cdot \vec{E} \quad , \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

wenn Diffusionsströme $\vec{j_R}$ vernachlässigt werden. Integriert man über die Querschnittsfläche S des Leiters mit dem Radius a, kommt man auf die integrale Form

$$\frac{1}{\mu\mu_0}\int_S \left(\nabla \times \vec{B}\right) d^2\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}\epsilon\epsilon_0 \int_S \vec{E} \circ d^2\vec{S} + \sigma \cdot \int_S \vec{E} \circ d^2\vec{S} \quad . \tag{31}$$

Mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes lässt sich das Flächenintegral über die Rotation des B-Feldes in ein Linienintegral entlang der Flächenumrandung C_S umwandeln.

$$\int_S \left(\nabla \times \vec{B}\right) d^2\vec{S} = \int_{C_S} \vec{B} \circ d\vec{s} \tag{32}$$

Das B-Feld ist ausserhalb des Leiters und wegen der Stetigkeitsbedingung (B_{tan} stetig) auch auf der Grenzfläche zum Leiter gegeben.

$$\int_{C_S} \vec{B} \circ d\vec{s} = B_\Phi 2\pi a = B_0 \Theta(t) 2\pi a \tag{33}$$

Da $\vec{E}$ und $\vec{j}$ über $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ verknüpft sind, folgt innerhalb des Leiters aus der homogenen Stromdichte $\vec{j} = j(t) \cdot \vec{e_z}$ das homogene elektrische Feld $\vec{E} = E(t) \cdot \vec{e_z}$. Das Flächenintegral über das E-Feld

$$\int_S \vec{E} \circ d^2\vec{S} = E\pi a^2 \tag{34}$$

lässt sich demnach einfach auswerten. Die Differentialgleichung

$$\frac{1}{\mu\mu_0} B_0 \cdot \Theta(t) \cdot 2\pi a = \epsilon_0\epsilon\pi a^2 \frac{\partial}{\partial t} E + \pi a^2 \sigma \cdot E \tag{35}$$

wird für $t < 0$ durch $E = 0$ gelöst. Für $t \geq 0$ wird der Ansatz

$$E = E_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \tag{36}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E = E_0 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \tag{37}$$

gewählt. Durch Einsetzen ergibt sich

$$\frac{2B_0}{\mu\mu_0 a}\Theta(t) = \epsilon\epsilon_0 E_0 \lambda \cdot e^{-\lambda t} + \sigma \cdot E_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \quad . \tag{38}$$

Nun müssen noch E_0 und λ bestimmt werden. Aus $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\lambda t} = 0$ folgt

$$E_0 = \frac{2B_0}{\mu\mu_0 a\sigma} \quad . \tag{39}$$

Da der zeitliche Verlauf des E-Feldes stetig sein muss ($E(t = 0) = 0$), folgt

$$\lambda = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0} \quad . \tag{40}$$

Die komplette Lösung für das elektrische Feld ist also

$$E(t) = \frac{2B_0}{\mu\mu_0 a\sigma} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_o}t}\right) \Theta(t) \quad . \tag{41}$$

Für den Strom J im Leiter folgt somit

$$J = \int_S \vec{j} d^2\vec{S} = j(t) \cdot \pi a^2 = \sigma E(t) \pi a^2 \tag{42}$$

$$= \frac{2\pi B_0 a}{\mu\mu_0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_o}t}\right) \Theta(t) \quad . \tag{43}$$

Aufgabe 10

Zwei lineare homogene isotrope Medien stoßen bei $x = 0$ aneinander. Im Bereich $x \leq 0$ existiert das elektrische Feld

$$E_- = E_1 \exp\left\{i\left(k_\mathrm{h} x - \omega t\right)\right\} \vec{e}_\mathrm{z} + E_2 \exp\left\{-i\left(k_\mathrm{r} x + \omega t\right)\right\} \vec{e}_\mathrm{z}$$

im Bereich $x > 0$ lautet das Feld

$$E_+ = E_3 \exp\left\{i\left(k_\mathrm{t} x - \omega t\right)\right\} \vec{e}_\mathrm{z}$$

wobei $E_3 = 0.5 E_1$ sein soll. Wie groß ist die Amplitude E_2?

Lösung

Die Felder müssen die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche erfüllen. Hier wäre das die Stetigkeit des tangentialen elektrischen Feldes

$$\vec{n} \times \left(\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \times \vec{n} \right) \Big|_{\text{Grenze}} = 0 \quad .$$

Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \vec{e}_{\text{x}}$ und die Grenze ist $x = 0$. In der obigen Formel muss $\vec{E}_1 = E_-$ und $\vec{E}_2 = \vec{E}_+$ ersetzt werden. Nach kürzen um $\exp\{-i\omega t\}$ resultiert $E_1 + E_2 = E_3$, also $E_2 = -0,5E_1$.

Aufgabe 11

Gegeben ist ein Stromfaden der Länge ℓ im freien Raum. An seinen Enden wird die Ladung $Q\{t\} = \pm Q_0 \exp\{i\omega t\}$ gemessen. Welcher Strom fließt im Faden?

Lösung

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt $I = -\frac{\partial}{\partial t} Q$. Der Strom im Faden ist also

$$I = \mp i\omega Q_0 \exp\{i\omega t\} \quad .$$

An beiden Enden sind genau entgegengesetzte Ladungen. Die Anordnung sieht also wie ein harmonisch schwingender Dipol der Stärke $Q\ell$ aus. Daher stammt auch der Name elektrischer Dipol für eine kurze Stabantenne.

Aufgabe 12

In einem inhomogenen Dielektrikum mit Dielektrizitätszahl $\varepsilon\{r\} = \varepsilon \left(\sin\{kr\} + 1 \right)$ wird das konstante elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \vec{e}_{\text{z}}$ gemessen. Berechnen Sie die Verteilung der freien Ladungen, wobei r den Abstand vom Ursprung angibt.

Lösung

Die Ladungsdichte freier Ladungen resultiert aus $\rho = \nabla \circ \vec{D}$. In dem hier vorausgesetzten linearen Medium gilt $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0 \vec{E} = \epsilon\epsilon_0 \left(\sin\{kr\} + 1 \right) E_0 \vec{e}_{\text{z}}$. Da $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist, gilt $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$ und somit $\rho = \epsilon\epsilon_0 k \frac{z}{r} \cos\{kr\} E_0$.

Aufgabe 13

Auf der Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei Medien mit relativen Permeabilitäten μ_1, μ_2 fließt der Flächenstrom

$$\vec{j}_{\text{S}} = j_0 \cos\left\{ \pi \frac{y}{b} \right\} \sin\{\omega t\} \vec{e}_{\text{x}} \quad .$$

Das magnetische Feld $\vec{H}_1$ im Bereich $z < 0$ ist für den Fall gesucht, dass es im anderen Bereich das Feld $\vec{H}_2 = H_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}$ herrscht. Geben Sie die Stetigkeitsbedingungen für die magnetischen Felder an der Grenzfläche an.

Lösung

Die Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche $z = 0$ lauten

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\Big|_{z=0} &= \vec{j}_\mathrm{S} \\ \vec{n} \circ \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\Big|_{z=0} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{44}$$

Es gilt in den vorausgesetzten linearen Medien $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, der Normalenvektor ist hier $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{z}$. Entsprechend ergibt sich

$$(\vec{n} \circ \vec{H}_1)\vec{n} = \frac{\mu_1}{\mu_2}(\vec{n} \circ \vec{H}_2)\vec{n} = H_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}$$

und

$$\left(\vec{n} \times \vec{H}_1\right) \times \vec{n} = \vec{j}_\mathrm{S} \times \vec{n} = j_0 \cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\}\sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{y} \quad .$$

Das Gesamtfeld lautet also

$$\vec{H}_1 = (\vec{n} \circ \vec{H}_1)\vec{n} + \left(\vec{n} \times \vec{H}_1\right) \times \vec{n} = j_0 \cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\}\sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{y} + H_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z} \quad .$$

Aufgabe 14

Welche Stromverteilung erzeugt im freien Raum das Lorentz-geeichte magnetische Vektorpotenzial

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}I_0\frac{l}{r}\exp\left\{i\left(k \cdot r - \omega t\right)\right\}\vec{e}_\mathrm{z} \quad ,$$

wobei r den Abstand zum Ursprung bezeichnet?

Hinweis: Formen Sie den Vektor $\vec{e}_\mathrm{z}$ nicht in Kugelkoordinaten um!

Lösung

Es gilt $\Delta\vec{A} - \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j}$. Im freien Raum ist $\epsilon = \mu = 1$. Hier kann also nach kürzen um μ_0 geschrieben werden

$$\vec{j} = \left(\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\left(\frac{1}{4\pi}I_0\frac{\ell}{r}\exp\left\{i(kr - \omega t)\right\}\right)\vec{e}_\mathrm{z} \quad .$$

Da das Vektorpotenzial nur von r abhängt, ist es hier zweckmäßig, den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten zu nehmen:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} \quad .$$

Dabei wurde bereits $\frac{\partial}{\partial\Phi} = 0$ und $\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$ berücksichtigt. Es resultiert für $r > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0}\Delta\vec{A} &= \frac{I_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\ell}{r}\exp\{i(kr-\omega t)\}\right)\vec{e}_\mathrm{z} \\
&= \frac{I_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\left(\frac{-\ell}{r^2}+\frac{ik\ell}{r}\right)\exp\{i(kr-\omega t)\}\right)\vec{e}_\mathrm{z} \\
&= \frac{I_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left(-k^2\ell r\right)\exp\{i(kr-\omega t)\}\,\vec{e}_\mathrm{z} \\
&= -k^2\frac{I_0}{4\pi}\frac{\ell}{r}\exp\{i(kr-\omega t)\}\,\vec{e}_\mathrm{z} = -k^2\vec{A} \quad .
\end{aligned}$$

Aus der zeitlichen Ableitung resultiert ein Faktor $-\omega^2$ und damit ergibt ich für die Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{I_0}{4\pi}\frac{\ell}{r}\left(k^2-\omega^2\epsilon_0\mu_0\right)\exp\{i(kr-\omega t)\}\,\vec{e}_\mathrm{z} \quad .$$

Wenn wie üblich $k^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$ angenommen wird, kann dem Vektorpotenzial also kein erzeugender Strom zugewiesen werden. Es ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung. Tatsächlich findet man dies Ergebnis nur abseits des Ursprungs. Im Ursprung selbst ist der Laplaceoperator divergent. Das sollte nicht weiter betrachtet werden. Es bleibt aber anzumerken, dass obiges Vektorpotenzial tatsächlich von einem elektrischen Hertzschen Punktdipol im Ursprung erzeugt wird (siehe Aufgabe 11).

Aufgabe 15

Eine elektromagnetische Welle hat das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0\sinh\left\{\pi\frac{x}{a}\right\}\cos\left\{\pi\frac{z}{b}-\omega t\right\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

und breitet sich in einem Medium mit Dielektrizitätskonstante ε und Permeabilität μ aus. Welches ist ihre Ausbreitungsrichtung? Wie lauten Gruppen- und Phasengeschwindigkeit? Berechnen Sie die Dispersionsrelation der Welle.

Lösung

Eine Lösung der homogenen Wellengleichung sind Wellen der Form $a\{\vec{r}\}f\{\vec{k}_\mathrm{a}\circ\vec{r}-\omega t\}$. Nur wenn $a\{\vec{r}\}$ ortsunabhängig ist, bezeichnen wir die Welle als ebene Welle. Der Ausdruck $\phi = \mathrm{Re}\left\{\vec{k}_\mathrm{a}\right\}\circ\vec{r}-\omega t$ bezeichnet die „Phase“. Die Welle breitet sich in Richtung von $\mathrm{Re}\left\{\vec{k}_\mathrm{a}\right\}$ aus.

Aus dem Vergleich resultiert, dass sich die Welle in z- Richtung mit $\mathrm{Re}\{k_\mathrm{a}\} = \frac{\pi}{b}$ ausbreitet. Sie ist selbst keine ebene Welle, entsteht aber aus der Überlagerung von vier ebenen Wellen, wie man der komplexen Darstellung entnehmen kann.

Die Phasengeschwindigkeit bezeichnet die Geschwindigkeit, mit der sich die Phase der Welle ausbreitet. Der Ort, an dem eine bestimmte Phase ϕ =const. herrscht, wandert mit der Geschwindigkeit $c_{\text{phase}} = \frac{\partial}{\partial t} r'$. Dabei wird $\vec{r}'$ nur in Richtung von $\text{Re}\left\{\vec{k}_{\text{a}}\right\}$ genommen. Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich also aus

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\phi = \text{Re}\left\{\vec{k}_{\text{a}}\right\} \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{r} - \omega = \text{Re}\left\{k_{\text{a}}\right\} \frac{\partial}{\partial t} r' - \omega \quad ,$$

zu

$$c_{\text{phase}} = \frac{\omega}{\text{Re}\left\{k_{\text{a}}\right\}} = \frac{\omega b}{\pi} \quad .$$

Die Gruppengeschwindigkeit gewinnt erst bei Modulation der Welle Bedeutung. Durch die Modulation wird aus der monochromatischen Welle ein Ensemble von Wellen mit der Bandbreite $\Delta\omega$ um ω. Jede dieser einzelnen Wellen breitet sich mit ihrer Phasengeschwindigkeit aus. Die Überlagerung der Wellen an einem Punkt z ergibt das Signal. Das Signal scheint nun mit der Gruppengeschwindigkeit gelaufen zu sein. Unter der Voraussetzung, dass $\Delta\omega << \omega$ ist, ergibt sich die Gruppengeschwindigkeit zu

$$c_{\text{gruppe}} = \frac{1}{\dfrac{\partial}{\partial \omega}\text{Re}\left\{k_{\text{a}}\right\}} \quad .$$

Mit Hilfe der Dispersionsrelation kann für die hier vorliegende Welle hergeleitet werden, dass auch

$$c_{\text{phase}} c_{\text{gruppe}} = c^2 = \frac{1}{\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0} = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c_0^2}{n^2}$$

gilt, also

$$c_{\text{gruppe}} = \frac{\omega \text{Re}\left\{k_{\text{a}}\right\}}{k^2} = \frac{\text{Re}\left\{k_{\text{a}}\right\}}{\omega\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0} = \frac{\pi}{\omega b \mu\mu_0\epsilon\epsilon_0}$$

Die Dispersionsrelation ist die Bedingung, die erfüllt sein muss, damit die vorgegebene Welle eine Lösung der Wellengleichung ist. Daher muss die Welle einfach nur in die Wellengleichung eingesetzt werden:

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \quad .$$

Es ergibt sich

$$\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 = 0 \quad .$$