# Aufgabe 1

**Lösung**

Das gegebene elektrische Feld entspricht dem einer konstanten Linienladung entlang der z-Achse. Es gilt

$$\vec{E} = E_0 \frac{\varrho_0}{\varrho} \vec{e_\varrho} = \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\varrho} \vec{e_\varrho}$$

mit $E_0 \varrho_0 = \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}$. Das Potential einer Linienladung ist

$$V = V(\varrho_0) + \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left\{\frac{\varrho_0}{\varrho}\right\} .$$

Die Potentialdifferenz zwischen $\vec{r_1}$ und $\vec{r_2}$ ist demnach

$$\begin{aligned} V &= V_1 - V_2 \\ &= \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0} \ln\left\{\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right\} \\ &= E_0 \varrho_0 \ln\left\{\frac{6}{2}\right\} . \end{aligned}$$

Die gesuchte Energie berechnet sich zu

$$\begin{aligned} W &= Q\,(V_2 - V_1) \\ &= Q E_0 \varrho_0 \ln 3 \,. \end{aligned}$$

# Aufgabe 2

**Lösung**

Zur Konstruktion gilt

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad ,$$

das heißt, Feldlinien sind geschlossen. Weiterhin gelten die Stetigkeitsbedingungen, die aus

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

und

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

folgen, d.h. die Tangentialkomponente von $\vec{H}$ ist stetig und die Normalkomponente springt. Also

$$H_{2,\mathrm{norm}} \mu = H_{1,\mathrm{norm}} \qquad ,$$

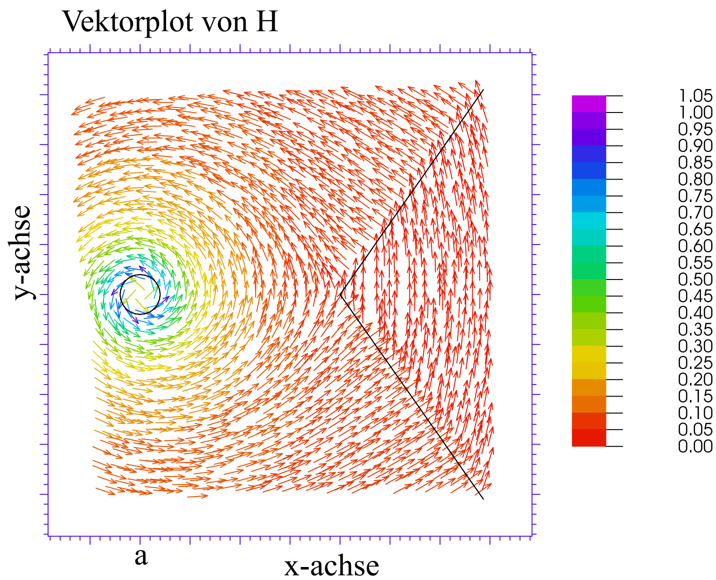


Abbildung 1: Vektorplot der vorgegebenen Anordnung. Die Feldlinien sind aus den Vektoren ersichtlich.

wobei $H_1$ das Feld im Außenraum bezeichnet. Darüber hinaus soll die Permeabilität sehr groß sein, also folgt

$$H_{2,\text{norm}} = \lim_{\mu \to \infty} \frac{H_{1,\text{norm}}}{\mu} = 0 \qquad ,$$

damit besteht das Feld im Keil im Grenzfall nur aus einer Tangentialkomponente. Damit die Feldlinien geschlossen bleiben, muss das Feld im Außenraum daher eine kleine Tangentialkomponente besitzen. Die Feldlinien starten daher fast senkrecht zur Keiloberfläche im Außenraum.
Die Feldverteilung sieht daher so aus:

# Aufgabe 3

**Lösung**
Das Koordinatensystem wird gemäß Abbildung 2 gewählt.
Die Translationssymmetrie in $y$- und $z$- Richtung bewirkt für das Potenzial

$$\frac{\partial}{\partial y} V = 0 \quad \frac{\partial}{\partial z} V = 0 \quad .$$

Der Sensor ist bis auf die Membran ladungsfrei. Somit können für die Bereiche 1 ($x \leq d$)

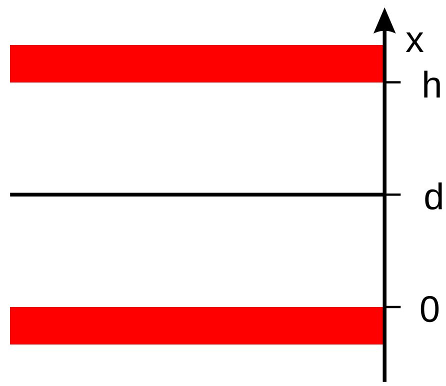


Abbildung 2: Drucksensor mit geladener Membran.

und 2 ($d \leq x$) Laplace-Gleichungen angenommen werden:

$$\Delta V_1 = 0 \quad \Delta V_2 = 0 \quad .$$

Die allgemeinen Lösungen lauten

$$V_1 = c_{11}x + c_{12} \quad V_2 = c_{21}x + c_{22}$$

Mit den elektrischen Feldern $\vec{E}_1 = -c_{11}\vec{e}_\mathrm{x} = E_1\vec{e}_\mathrm{x}$, $\vec{E}_2 = -c_{21}\vec{e}_\mathrm{x} = E_2\vec{e}_\mathrm{x}$. Das Potenzial muss bei $x = d$ stetig sein, also $V_1\{d\} = V_2\{d\}$ und damit

$$V_2 = V_1\{d\} + c_{21}(x - d) \quad .$$

Das Potenzial im gesamten Sensor lässt sich somit wie folgt beschreiben:

$$V = \begin{cases} V_1 & \text{für } 0 \leq x \leq d \\ V_2 & \text{für } d \leq x \leq h \end{cases} \quad .$$

Als weitere Randbedingung ist angegeben, dass der Potenzialunterschied $\mathrm{U} = V\{h\} - V\{0\} = 0$ sein soll. Damit resultiert

$$U = V_1\{d\} + c_{21}(h - d) - V_1\{0\} = c_{11}d + c_{21}(h - d) = 0 \quad ,$$

womit

$$c_{21} = -c_{11}\frac{d}{h - d}$$

folgt. An der Membran muss die Stetigkeitsbedingung für $\vec{D}$ erfüllt sein:

$$\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{x=d} = \varrho_\mathrm{S}$$

Da beide Räume ungefüllt sind und $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{x}$ gilt, resultiert

$$\epsilon_0(-c_{21} + c_{11}) = \varrho_\mathrm{S} \quad ,$$

also

$$c_{11} = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{\epsilon_0}\frac{h-d}{h} \quad .$$

Das Potenzial im gesamten Sensor lautet also

$$V = c_{12} + \frac{\varrho_\mathrm{S}}{\epsilon_0}\begin{cases} \frac{h-d}{h}x & \text{für } 0 \le x \le d \\ \frac{d}{h}(h-x) & \text{für } d \le x \le h \end{cases} \quad .$$

Nach einer Verschiebung der Membran um $\Delta d$ nach $d_1 = d + \Delta d$ ändern sich die Felder nicht. Es folgt für das Potenzial

$$\begin{aligned} V &= c_{12} + \begin{cases} c_{11}x & \text{für } 0 \le x \le d_1 \\ c_{11}d_1 + c_{21}(x-d_1) & \text{für } d_1 \le x \le h \end{cases} \\ &= c_{12} + \begin{cases} \frac{h-d}{h}x & \text{für } 0 \le x \le d_1 \\ \frac{h-d}{h}d_1 - \frac{d}{h}(x-d_1) & \text{für } d \le x \le h \end{cases} \quad . \end{aligned}$$

Die Potenzialdifferenz zwischen den Elektroden ist also

$$\begin{aligned} U &= \frac{\varrho_\mathrm{S}}{\epsilon_0}\left(\frac{h-d}{h}d_1 - \frac{d}{h}(h-d_1)\right) \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S}}{\epsilon_0}\left(\frac{h-d}{h}\Delta d + \frac{d}{h}\Delta d\right) \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S}}{\epsilon_0}\Delta d \quad . \end{aligned}$$

Die Oberflächenladung beträgt 55 Elektronen pro $\mathrm{mm}^2$, also

$$\varrho_\mathrm{S} = 8.8 \cdot 10^{-12}\mathrm{As/m^2} \quad .$$

Damit ergibt sich aus der Spannung von $U = 1\,\mathrm{mV}$ wegen $\epsilon_0 \simeq 8.8 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$ eine Verschiebung um

$$\Delta d = U\frac{\epsilon_0}{\varrho_\mathrm{S}} = 1\,\mathrm{mm}$$

# Aufgabe 4

**Lösung**

Es gibt beliebig viele Möglichkeiten für die Zerlegung. Eine lautet

$$\begin{aligned}\vec{E}\{\vec{r},t\} &= E_0\,(1-i,2+i,0)^T\,e^{\{i(kz-\omega t)\}}\\ &= E_0\,(1-i,1+i,0)^T\,e^{\{i(kz-\omega t)\}}\\ &+ E_0\,(0,1,0)^T\,e^{\{i(kz-\omega t)\}}\,.\end{aligned} \tag{1}$$

# Aufgabe 5

**Lösung**

Die Poissongleichung in Kugelkoordinaten lautet

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}V\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}V\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\varphi^2}V=-\frac{\varrho_V}{\varepsilon_1\varepsilon_0}$$

und unter Berücksichtigung der Symmetrie

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}V\right)=-\frac{\varrho_V}{\varepsilon_1\varepsilon_0}\qquad.$$

Die Kugel teilt den Raum in zwei Bereiche. Außerhalb der Kugel lautet der Ansatz (homogene Lösung)

$$V_1=-\frac{C_1}{r}+C_2$$

und im Innenraum (homogene Lösung + partikuläre Lösung)

$$V_2=-\frac{C_3}{r}+C_4-\frac{\varrho_0 r^3}{12\varepsilon_1\varepsilon_0 R}\qquad.$$

Da das Potenzial bei $\rho=0$ nicht divergieren darf, muss $C_3=0$ gelten. Bei $\rho=R$ muss das Potenzial stetig sein, wobei $\rho_0=R$ gesetzt wurde

$$C_2=C_4-\frac{\varrho_0 R^2}{12\varepsilon_1\varepsilon_0}\qquad.$$

Ebenso muss die Ableitung stetig sein

$$\frac{C_1}{R^2}=\frac{C_3}{R^2}-\frac{\varrho_0 R}{4\varepsilon_1\varepsilon_0}\qquad.$$

Üblich ist weiterhin, dass das Potenzial im Unendlichen zu Null gewählt wird, daher

$$C_2=0\qquad.$$

# Aufgabe 6

**Lösung**

Die Dispersionsrelation folgt als Bedingung aus der Wellengleichung. Sie muss erfüllt sein, damit das Feld eine Lösung der Wellengleichung ist. Da hier keine Anregung vorliegt, handelt es sich um die homogene Wellengleichung:

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \quad .$$

Auswertung des Laplace-Operators ergibt

$$\Delta\vec{E} = -\left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \gamma^2\right)\vec{E}$$

und die doppelte Zeitableitung resultiert in

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\omega^2\vec{E} \quad .$$

Wegen $\varepsilon = 1$ ergibt sich

$$-\left(\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \gamma^2 - \mu\mu_0\varepsilon_0\omega^2\right)\vec{E} = 0 \quad .$$

Für beliebige Zeitpunkte und Orte im Raum ist die Gleichung nur erfüllt, wenn

$$\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 + \gamma^2 - \mu\mu_0\varepsilon_0\omega^2 = 0$$

gilt. Dies ist die gesuchte Dispersionsrelation.

# Aufgabe 7

**Lösung**

Das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\nabla\Phi_{el} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

geht ohne Berücksichtigung der Magnetfelder ($\vec{A} = \vec{0}, \Phi_{el} = V$) in

$$\vec{E} = -\nabla V$$

über. Wegen der gegebenen Geometrie muss

$$V = -\int_0^{2a} \vec{E}\vec{ds} = (E_1 + E_2)a$$

gelten. Dabei gilt $\vec{E}_1 = -E_1\vec{e_z}$ und $\vec{E}_2 = -E_2\vec{e_z}$. In Medium 1 $(0 < z < a)$ dominieren die ohmsche Str
öme, daher gilt

$$\vec{j_1} = \sigma \vec{E}_1 \,.$$

In Medium 2 gibt es nur Verschiebungsströme

$$\vec{j_2} = \varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}_2 = i\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\vec{E}_2$$

Es muss $\vec{n}\circ\vec{j_1} = \vec{n}\circ\vec{j_2}$ mit $\vec{n} = \vec{e}_{\mathrm{z}}$ gelten. Dadurch sind $E_1$ und $E_2$ über

$$\frac{E_1}{E_2} = i\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}\omega}{\sigma}$$

verknüpft. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{V}{d\left(1 + i\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}{\sigma}\right)} \\
E_1 &= \frac{V}{d\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)} \,. \\
\vec{n}\circ\vec{j_1} = \vec{n}\circ\vec{j_2} &= \frac{\sigma V}{d\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}\right)}
\end{aligned}$$

# Aufgabe 8

**Lösung**

Im dynamischen Fall gilt

$$U = -\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}$$

Anwenden des Stoke'schen Satzes auf das Induktionsgesetz liefert

$$\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = \iint \nabla\times\vec{E}\,\mathrm{d}^2\vec{S} = \iint -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\,\mathrm{d}^2\vec{S} \qquad .$$

Damit folgt

$$U = \frac{\mu_0 I}{2\pi t_0}\iint \frac{1}{\rho}\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}^2\vec{S}$$

$$U = \frac{\mu_0 I}{2\pi t_0}\iint\limits_{\text{Rechteck}} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\phi\,\mathrm{d}^2\vec{S} \qquad ,$$

$$U = \frac{\mu_0 I}{2\pi t_0} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{3a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\rho} \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\rho$$

$$U = \frac{\mu_0 I a}{2\pi t_0} \ln\{3\}$$

# Aufgabe 9

**Lösung**

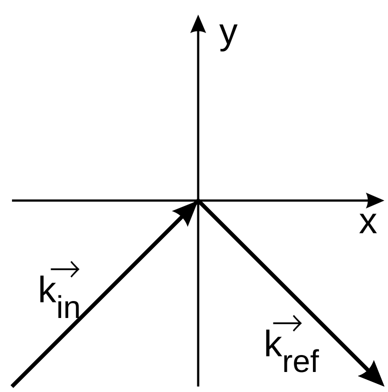


Abbildung 3: Wellenzahlvektoren im Medium 1.

Für das transmittierte Feld muss eine ebene Welle der Form

$$\vec{E}_\mathrm{t} = \vec{E}_2 \exp\{i(\vec{k}_\mathrm{t} \circ \vec{r} - \omega t)\} = E_2 \exp\{i(\vec{k}_\mathrm{t} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{z}$$

angenommen werden. An der ladungsfreien Grenzfläche $y = 0$ müssen das tangentiale elektrische Feld und die normale dielektrische Verschiebung stetig sein:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{y=0} = 0 \; \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{y=0} = 0 \quad .$$

Der Normalenvektor ist hier $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{y}$. Einsetzen ergibt wegen $\vec{n} \circ \vec{D}_1 = 0$, dass keine Normalkomponente von $\vec{E}_2$ existiert und im weiteren

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = 2E_0 \exp\{i(k_\mathrm{x} x - \omega t)\}$$

also

$$\vec{n} \times \vec{E}_\mathrm{t} = 2E_0 \exp\{i(k_\mathrm{x} x - \omega t)\}$$

und nach Vergleich mit obigem Ansatz:

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= 2E_0\vec{e}_\mathrm{z} \\ \vec{k}_\mathrm{t} &= k_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + k_\mathrm{ty}\vec{e}_\mathrm{y} \quad .\end{aligned}$$

Wenn $\vec{k}_\mathrm{x}$ bekannt ist, lässt sich $\vec{k}_\mathrm{ty}$ aus der Dispersionsrelation der transmittierten Welle ermitteln. Der Wert von $k_\mathrm{x}$ folgt aus der Aufgabenstellung ($k_\mathrm{x} = k_\mathrm{y}$) mit der Dispersionsrelation der einfallenden Welle

$$k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 - \omega^2\epsilon_0\mu_0 = 0$$

zu

$$k_\mathrm{x}^2 = 0.5\omega^2\epsilon_0\mu_0 = 0.5k_0^2$$

und mit

$$k_\mathrm{x}^2 + k\mathrm{ty}^2 - \omega^2\epsilon\epsilon_0\mu_0 = 0$$

$$\begin{aligned}k_\mathrm{ty}^2 &= \omega^2\epsilon\epsilon_0\mu_0 - k\mathrm{x}^2 = \epsilon k_0^2 - k_\mathrm{x}^2 \\ &= 2k_0^2 \quad .\end{aligned}$$

# Aufgabe 10

**Lösung**

Die Punktladungen $Q_n$ gibt es jeweils 6 mal. Diese können durch die Raumladungsdichten

$$\begin{aligned}\rho_{n1}\{\vec{r'},t\} &= Q_n(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z-na) \\ \rho_{n2}\{\vec{r'},t\} &= Q_n(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z+na) \\ \rho_{n3}\{\vec{r'},t\} &= Q_n(t)\delta(x)\delta(y-na)\delta(z) \\ \rho_{n4}\{\vec{r'},t\} &= Q_n(t)\delta(x)\delta(y+na)\delta(z) \\ \rho_{n5}\{\vec{r'},t\} &= Q_n(t)\delta(x-na)\delta(y)\delta(z) \\ \rho_{n6}\{\vec{r'},t\} &= Q_n(t)\delta(x+na)\delta(y)\delta(z) \\ \rho_n\{\vec{r'},t\} &= \sum_{i=1}^{6}\rho_{ni}\{\vec{r'},t\} \\ \rho\{\vec{r'},t\} &= \sum_{n=1}^{\infty}\rho_n\{\vec{r'},t\} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{6}\rho_{ni}\{\vec{r'},t\} \qquad (2)\end{aligned}$$

mit

$$Q_n(t) = Q_0 \frac{1}{n} \delta\left(t + \frac{na}{c}\right)$$

beschrieben werden. Das durch die Ladungen verursachte Potential ist das *retardierte Potential* und lautet im Ursprung

$$\begin{aligned}
\Psi(\vec{r} = \vec{0}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho\left\{\vec{r'}, t - \frac{|\vec{r'}|}{c}\right\}}{|\vec{r'}|} d^3r' \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{6} \frac{\rho_{ni}\left\{\vec{r'}, t - \frac{|\vec{r'}|}{c}\right\}}{|\vec{r'}|} d^3r' \\
&= \frac{6Q_0}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta\left(t - \frac{na}{c} + \frac{na}{c}\right)}{n^2 a} \\
&= \frac{\pi Q_0}{4\epsilon a} \delta(t)
\end{aligned} \tag{3}$$

# Aufgabe 11

**Lösung**

Die Volumenladungsdichte besitzt die folgende Darstellung

$$\varrho_v = q\delta\{\rho - l\}\delta\{z\}\delta\{\varphi - \alpha\}$$

Der Strom lautet

$$\vec{j} = \rho_V \vec{v} \qquad ,$$

wobei die Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} l \vec{e}_\varphi = \alpha_0 l \omega \cos(\omega t) \vec{e}_\varphi$$

lautet. Die Stromdichte ist damit

$$\vec{j} = Q\delta\{r' - l\}\delta\{z\}\delta\{\varphi - \alpha\}\omega\alpha_0 l \cos(\omega t)\vec{e}_\varphi$$

Die magnetische Induktion berechnet sich damit wie folgt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\vec{j}_v \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{B}(\vec{r} = 0) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\vec{j}_V \times \vec{r'}}{|\vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{B}(\vec{r}=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega Q}{l^3}\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\delta\{r'-l\}\delta\{\varphi-\alpha\}\alpha_0 l\cos(\omega t)r'\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r'\vec{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega Q}{l}\alpha_0\int_0^{2\pi}\delta\{\varphi-\alpha\}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_z$$

$$\vec{B}(\vec{r}=0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega Q}{l}\alpha_0\cos(\omega t)\vec{e}_z$$

# Aufgabe 12

**Lösung**

Die Ladungsdichte an der Oberfläche einer Grenzfläche resultiert aus

$$\vec{n}\circ\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)\Big|_{\text{Grenze}} = \varrho_\text{S} \quad .$$

Im Fall einer metallischen Grenzfläche kann $D_1 = 0$ gesetzt werden, wenn der Normalenvektor von der Metallfläche weg weist. Die Grenze wird hier durch $x = 0$ und $\vec{n} = \vec{e}_\text{x}$ beschrieben. Die dielektrische Verschiebung resultiert aus dem Magnetfeld nach Anwendung von

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$$

zu

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = H_0\left(-i\beta\cos\{\pi\frac{x}{a}\}\sin\{\pi\frac{y}{b}\}\vec{e}_\text{x} - \frac{\pi}{b}\sin\{\pi\frac{x}{a}\}\sin\{\pi\frac{y}{b}\}\vec{e}_\text{z}\right)\exp\{i(\beta z-\omega t)\} \quad ,$$

also

$$\vec{D} = H_0\frac{1}{\omega}\left(\beta\cos\{\pi\frac{x}{a}\}\vec{e}_\text{x} - i\frac{\pi}{b}\sin\{\pi\frac{x}{a}\}\vec{e}_\text{z}\right)\sin\{\pi\frac{y}{b}\}\exp\{i(\beta z-\omega t)\} \quad .$$

Somit lautet die Oberflächenladung

$$\varrho_\text{S} = H_0\frac{\beta}{\omega}\sin\{\pi\frac{y}{b}\}\exp\{i(\beta z-\omega t)\} \quad .$$